대한기계학회 주최

제13회 전국학생설계경진대회(2023년)

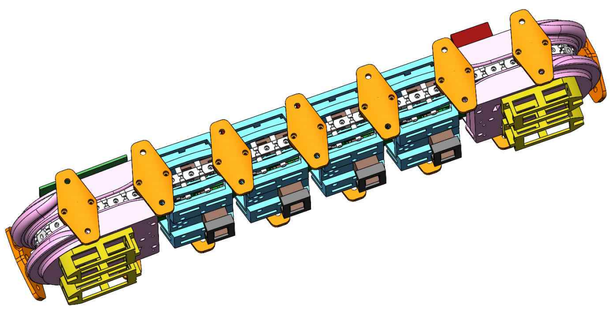
설계 최종 보고서

<table>
<tr><td>참가부</td><td colspan="5">대학부 (O)</td></tr>
<tr><td>참가분야</td><td colspan="5">공모주제 (O) / 자유주제 ( )</td></tr>
<tr><td>참가팀명</td><td colspan="5">Santal</td></tr>
<tr><td>설계제목</td><td colspan="5">접지형 뱀 로봇을 응용한 생존자 탐색 로봇</td></tr>
<tr><td>지도교수/교사</td><td colspan="5">(소속) 한국기술교육대학교 (성명) 김홍근 (연락처) (이메일)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">대표자
(신청인)</td><td>성명</td><td>소속</td><td>연락처 (휴대폰)</td><td>E-mail</td><td>주소</td></tr>
<tr><td>박순용</td><td>한국기술교육대학교
메카트로닉스 공학부</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

참가팀원 인적사항

NO	성명	소속 / 학년	E-MAIL
1	박순용	한국기술교육대학교 메카트로닉스공학부 / 4학년	
2	박세원	한국기술교육대학교 메카트로닉스공학부 / 4학년	
3	정희준	한국기술교육대학교 메카트로닉스공학부 / 4학년	
4	홍장환	한국기술교육대학교 메카트로닉스공학부 / 4학년	
5	이정민	한국기술교육대학교 메카트로닉스공학부 / 4학년	
6	정동민	한국기술교육대학교 메카트로닉스공학부 / 4학년	

설계 요약문

참가분야	공모주제 (O) / 자유주제 ( )
참가팀명	Santal
설계제목	접지형 뱀 로봇을 응용한 생존자 탐색 로봇
대표자명	박순용
요약문	**설계 배경:** 자연재해로 인한 인명 구조 활동에 로봇이 유용하게 사용될 수 있다. 그 중에서도 뱀 로봇은 인간의 접근이 어려운 지형에 접근할 수 있어 활용 가치가 높다. 하지만 미끄러짐을 허용하는 주행 방식으로 인해 위치 추정이 어려워 자율 주행에 근간한 탐색 로봇으로의 응용이 어렵다. 본 설계에서는 접지 조건을 적용한 뱀 로봇을 설계하여 뱀 로봇의 자율 주행의 토대를 마련한다. **설계 내용:** 지면과의 접촉 면적을 이산화한 새로운 형태의 무한궤도를 적용한 액추에이터 “이산 무한궤도”를 구상하였다. 더 나아가, 이산 무한궤도를 활용한 뱀 로봇이 지면과의 미끄러짐 없이 전진과 방향 전환이 가능하도록 하는 구동 방식을 구상하였으며, 그 기구학적 조건을 수학적으로 정리하였다. 수치해석을 통해 역학적 조건을 확인하여 주행 경로의 곡률과 로봇 길이의 물리적 제약 조건을 공식화하였다. 이상의 내용을 토대로 이산 무한궤도를 활용한 뱀 로봇의 하드웨어와 구동 프로그램을 설계하였다. **설계 결과:** 설계 내용을 토대로 이산 무한궤도를 사용한 접지형 뱀 로봇을 제작하였다. 사용자가 입력한 임의의 주행 경로를 따라 주행 가능하다. **기대 효과:** 정확한 주행 정보를 토대로 더 정확한 위치 추정이 가능해지며, 이동로봇의 자율 주행을 위한 각종 자원을 뱀 로봇에 이식하기 위한 토대가 될 수 있다. 
설계프로젝트의 입상 이력	- 출품작명 : 단일 무한궤도를 활용한 뱀 로봇 - 출품대회명 : 2023 디지털미래혁신대전(2023.09.25~27. 출품 예정) - 수상 내역 : 전시 목적의 대전임. 수상과 무관함.

접지형 뱀 로봇을 응용한 생존자 탐색 로봇

박순용*·홍장환*·정동민*·정희준*·이정민*·박세원*·김홍근*†
*한국기술교육대학교 메카트로닉스공학부

Survivor searching robots using non-slip snake robots

Soonyong Park*, Janghwan Hong*, Dongmin Jung*, Huijun Jeong*, Jeongmin Lee*, Sewon Park*, and Hongkeun Kim*†
* School of Mechatronics Engineering, Korea University of Technology and Education

Key Words: Non-slip condition(접지 조건), snake robot(뱀 로봇), unmanned ground vehicle(무인 지상 로봇), search and rescue robot(탐색-구조 로봇)

초록: 본 연구에서는 뱀 로봇의 SAR로써의 활용도를 높이기 위하여 접지 조건을 적용할 수 있는 새로운 구동 방식을 설계하였다. 새로운 로봇은 여러 개의 강체 체절과 접지용 패드를 부착한 유니버설 체인을 갖는다. 사용자는 서보 모터와 DC 모터를 통해 체절 사이의 각도와 유니버설 체인의 회전 속도를 제어할 수 있다. 본문에서는 수치 해석적 방법을 적용하여 진행 거리에 대한 체절 사이의 각도 사이의 연속성을 검증하였다. 또한 로봇의 각 조인트에서 발생하는 돌림힘과 DC 모터에 의한 추진력의 크기, 접지용 패드에 가해지는 반작용의 크기 등을 정량적으로 해석하였으며, 이를 통해 원활한 동작을 위한 체절의 개수를 특정하였다.

Abstract: In this study we designed new driving method for snake robot in order to improve availability of snake robot as an SAR robot. The robot has rigid segments and universal chain with grounding pads attached. Users can control segment angles or chain velocity via motors. In this paper, We examined continuity between travel distance and segment angles of the robot using numerical methods. Also, We analyzed torques and thrusts by motors, and reaction forces exerted by grounding pads to find the proper number of segments.

1. 서 론

근래의 지구 온난화가 급격하게 진행되면서 자연재해의 발생 빈도 또한 크게 늘었다. 유엔재해경감사무국의 보고에 의하면, 2021년 한 해의 자연재해 발생 빈도는 이전의 30년(1991-2020)에 비하여 13% 증가했다.(1) 특히 도시와 같이 많은 구조물이 포진한 지형에서는 폭우나 지진 등에 의한 건축물 붕괴 등의 2차 피해가 발생하기 쉽다. 최근의 급격한 도시화와 인구 성장으로 인해 이러한 2차 피해의 규모와 범위가 더욱 심각해질 것으로 전망된다. 따라서 2차 피해의 예방과 복구의 중요성은 점점 더 커지고 있다.

2차 피해로 인한 붕괴 현장에서의 복구 작업에는 생존자 탐색 작업이 필수적으로 포함된다. 안타깝게도, 붕괴 지형의 특성상 인간이 접근하기 어려운 지형이 많다. 2000년도 이후, 이러한 지형에서 생존자를

† Corresponding Author, hkkim@koreatech.ac.kr

Fig. 1 Various examples of snake-like robots. (Top left) ACM-R3, (top right) TSD, and (bottom) Omni-tread.

탐색하는 수단으로 이동로봇을 도입하는 시도가 이어지고 있으며, 이러한 로봇을 search and rescue robot (이하 SAR 로봇)이라고 한다.[2] 현재까지 개발된 SAR 로봇은 용도에 따라 그 종류가 다양하다. 그 중에서도 뱀 로봇은 협소한 지형을 탐사하기에 적합한 형태를 갖는다.

지상 주행용 뱀 로봇의 대표적인 구동 방식으로는 ACM(Active Cord Mechanism)과 TSD(Toroidal Skin Driving), Omni-tread 방식 등이 존재한다.[3] ACM은 로봇의 몸통을 프레네-세레의 방정식을 통해 묘사 및 제어하는 구동 방식이다. TSD 방식은 로봇의 각 체절을 토로이드 형태의 외피로 감싸서 모터를 사용하여 외피를 회전시키는 방식을 취한다. Omni-tread 방식은 로봇을 구성하는 각 체절의 모든 방향에 무한궤도를 설치하고 일괄적으로 연동하여 구동하는 형태이다. 이 밖에도 뱀 로봇의 구동 방식은 다양하게 존재한다. 높은 환경 적응성과 협소 지형에서의 적응성은 뱀 로봇 전반에 걸친 공통적인 특징이다. 뱀 로봇의 이러한 특성을 고려하면, 협소 지형 탐사 및 지형 정보 취득, 더 나아가서는 자율적인 생존자 탐색 등의 기능을 기대할 수 있다. 이러한 기술들은 뱀 로봇의 자율 주행을 통해 가능하다. 자율 주행 알고리즘에는 위치 추정 알고리즘이 필수적인데, 안타깝게도 뱀 로봇의 위치 추정은 매우 까다로운 문제이다.

일반적으로 이동로봇의 위치 추정에는 칼만 필터(Kalman Filter) 혹은 마르코프 필터(Markov Filter) 등의 재귀적 알고리즘이 사용된다. 두 필터 모두 센서를 통해 얻은 위치 정보와 주행 정보를 통하여 로봇의 상태를 추정하는 방식을 취한다.[4] 이때, 위치 정보를 얻기 위한 센서로는 가속도 센서, 지자기 센서, GPS, 카메라, 라이다 센서 등이 있다. 안타깝게도, 뱀 로봇에 이 센서들을 적용하는 것은 다소 어렵다. 가장 큰 이유는 뱀 로봇의 투입 환경이다. 도심 붕괴 현장의 협소 지형에 투입되어야 한다는 점을 고려하자. 전파, 금속 혹은 불 등의 요소는 지자기 센서의 활용을 어렵게 한다. 붕괴 건물 내부를 탐색하는 경우 GPS의 활용도 어려우며, 차체의 좌우 폭이 작아야 한다는 제약으로 인해 라이다의 탑재도 어렵다. 로봇의 구동 방식 또한 문제가 된다. 앞서 언급한 ACM과 Omni-tread와 같이, 많은 종류의 뱀 로봇은 지면 혹은 벽과의 충돌을 허용하는 주행 방식을 취하고 있다. 주행 중 발생하는 충격은 가속도 센서에 심한 노이즈와 신호 왜곡을 일으킬 수 있다. 카메라 사용 시에는 흔들림으로 인해 시각 정보의 취득에 장애가 발생한다. 또한, 지면과의 미끄러짐은 주행 정보의 정확도를 크게 훼손한다.

Table 1 Classification and Characteristics of snake-like robots.

Driving types		Characteristics	Models
Passive wheel		Passive wheel applied robots use anisotropic friction made by passive wheels as thrust.	ACM-III, ACM-R3
		- It applies the principle of how the snakes move. - Every Passive wheel model uses ACM as kinematic description method. - The robot heavily fluctuates laterally. - The robot can crash to the ground because of its control method. - The robots can slip on ground.	
Active propulsion	AWL	AWL robots use motor-driven wheels to make friction between ground. The friction act as driving force.	ACM-R4.1, GMD snake
		- Using encoder, the robot can acquire driving information. - Wheel-applied motion can effectively reduce mechanical vibration and external shock. - The robots can slip on ground.	
	ACL	ACL robots uses caterpillars to make friction between ground. The frictions act as thrust.	Omni-tread, Active crawler, Guardian® S
		- Caterpillars can effectively reduce robots' mechanical vibration and shock. - The robots can slip on ground.	
	ASL	ASL type robots have active propulsion unit on all direction of body segment so the robots can make friction force anywhere on its skin.	TSD, Omni-tread, GMD snake
		- (TSD) Though the robot can satisfy non-slip condition, deformation of skin driving material causes error on driving information. - In general, the robots' driving units consist of that of AWL or ACL. - In general, the robots can slip on ground.	

본 연구에서는 이상의 두 문제 중 회피 가능한 문제는 로봇의 구동 방식의 결함이라고 판단한다. 구동 방식으로 인한 문제 중에서도 특히 두드러지는 문제는 충격과 주행 정보의 부정확성이었다는 점을 고려하여, 본 연구에서는 진동이 적고 정확한 주행 정보를 제공할 수 있는 구동 방식의 뱀 로봇을 설계하기로 한다.

2. 설계핵심내용

본 연구에서는 일반적인 공학 설계 프로세스[11]와는 달리, 폭포수 모형과 공학 설계 프로세스를 결합한 형태의 프로세스를 적용한다. 연구 및 설계 인력이 많지 않아 다수의 설계안을 동시에 구체화하고 검증하기 어렵다는 점을 반영한 것이다. 상세한 설계 프로세스와 시행착오 과정 등의 내용은 부록1에서 자세히 다루며, 본문에서는 최종 설계안만을 기술한다.

2.1 회피 전략

X. Yang 등의 보고에 의하면[3] 뱀 로봇의 형태는 매우 다양하다. 그중에서도 지상 주행용 뱀 로봇의 구동 방식은 크게 수동 바퀴(passive wheel) 방식과 능동 추진(active propulsion) 방식으로 구분된다. 수동 바퀴를 사용하는 대표적인 로봇으로는 동경공업대학(東京工業大学)에서 개발한 ACM-III와 ACM-R3가 존재한다. 능동 추진 방식으로는 ACM 방식, TSD 방식, Omni-tread 방식, GMD 방식 등이 보고된 바 있다. 특히 ACM 방식은 수동 바퀴 방식과 능동 추진 방식 모두에 적용 가능하다. 한편, Shigeo Hirose, Hiroya Yamada 등에 의하면 Active

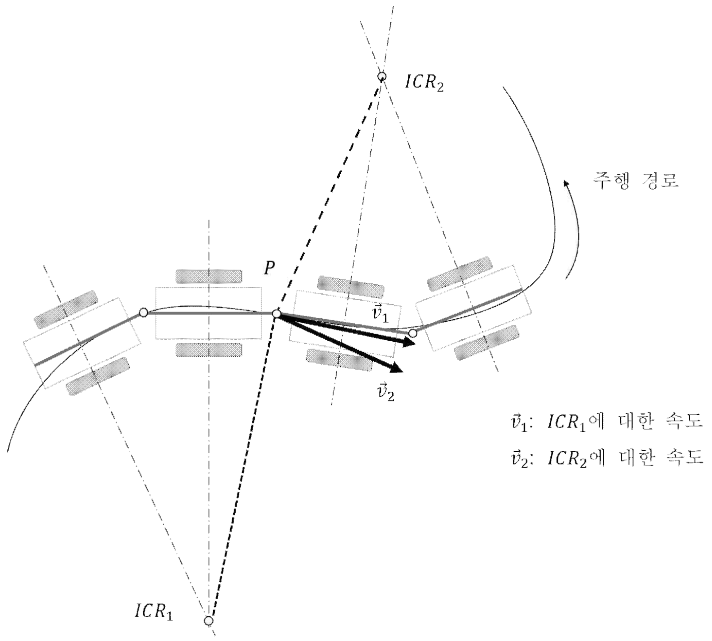


Fig. 2 Failure of non-slip conditions in AWL snake-like robots.

crawler 방식 또한 존재하며, 대표적인 모델로 Souryu-IV를 제시하였다.(6) 본 연구에서는 서론에서 이야기한 진동과 주행 정보를 기준으로, 능동 추진 방식을 AWL(active wheel locomotion), ACL(active caterpillar locomotion), ASL(active skin locomotion)의 3가지 종류로 구분한다. 표 1은 주행 정보와 진동에 대한 각 구동 방식의 특징을 표로 정리한 것이다.

TSD 방식을 제외한 모든 구동 방식에서 지면과의 미끄러짐이 발생함에 주목하자. ACL 방식은 곡선 주행 시 반드시 무한궤도와 지면 사이의 미끄러짐이 발생한다는 점은 어렵지 않게 알 수 있다. 반면 AWL 방식에서 미끄러짐이 발생하는 이유는 그보다 다소 복잡하다. 그림 2는 뱀 로봇이 접지 조건을 만족한다는 가정 하에 각 체절에 의해 결정되는 순간중심 ICR의 위치를 나타낸 것이다. 관절 P의 속도를 결정하는 방법으로 ICR_1과 ICR_2을 선택했을 때 계산되는 속도 벡터 $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$의 값이 명확하게 다름을 알 수 있으며, 이는 가정이 옳지 않음을 나타낸다.

이상에서 확인할 수 있듯, 대부분의 뱀 로봇은 정확한 주행 정보를 제공하는 것이 불가능하다. 본 설계에서는 접지 조건을 만족할 수 있다는 점을 고려하여 TSD 방식의 특징을 회피 요소로 판단한다. TSD 방식이 접지 조건을 충족할 수 있는 이유는 동력 전달 매체의 변형이 자유롭기 때문이다. 이에 따라 본 설계에서는 강체를 통한 동력 전달 방식을 사용하는 구동 방식을 설계한다.

2.2. 설계 문제 및 제약 조건 특정

2.1절에서 살펴보았듯이, 현재까지 고안된 뱀 로봇의 구동 방식 중, TSD 방식을 제외한 그 어느 경우에도 접지 조건을 만족하는 경우는 없다. 특히 AWL의 경우, 2.1절에서 살펴본 바와 같이 원천적으로 접지 조건의 충족이 불가능하다. 따라서 ACL 혹은 ASL 방식을 기초로 하여 설계 문제를 고려하는 것이 적절하다. 또한 ASL은 동력 전달의 매개체에 대한 조건을 부여하지는 않기 때문에, 결과적으로는 ACL 방식을 기본적인 틀로 선정하는 것이 타당하다. 설계의 다음 단계로 나아가기 위해서는 ACL 방식의 로봇이 접지 조건을 만족하지 못하는 원인을 분석해야 한다.

본 연구에서는 그 근본적인 원인을 무한궤도의 자유로운 변형이 불가능하다는 점에서 찾는다. 무한궤도가 곡선 형태의 주행 경로에 대하여 접지 조건을 충족하기 위해서는 그림 3의 좌측 그림과 같이 무한궤도가 평면상에서 일정 수준 이상의 곡률로 자유롭게 변형할 수 있어야 한다. 하지만 일반적인 무한궤도의 재질(금속 혹은 고무)로는 이러한 변형이 불가능하다. 방향 전환에 필요한 변형에 매우 큰 힘이 필요하기 때문이다. 가능하다 하

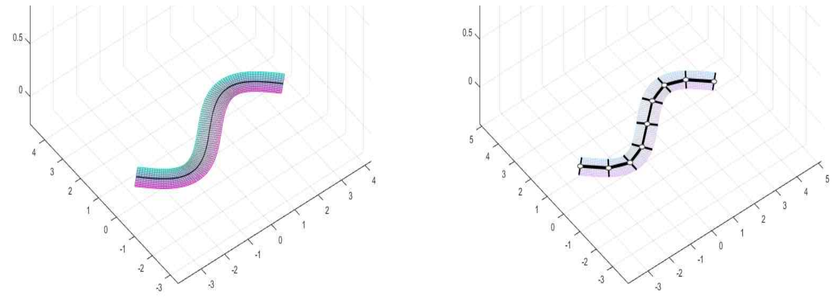


Fig. 3 Continuous (left) and discrete (right) caterpillars. Segments in black have no deformation.

더라도 내구성에 문제를 일으킬 확률이 높다. 이에, 본 연구에서는 수치 해석의 이산화라는 개념을 응용하여 무한궤도를 이산화하는 방안을 시도하였다. 그림 3의 우측 그림과 같이 무한궤도의 면 일부만이 점의 형태로 지면에 접촉하도록 하였다. 이 방법을 적용하면 무한궤도를 이루는 요소의 변형을 고려할 필요가 사라지며, 동시에 임의의 곡선에 대하여 접지 조건을 적용할 수 있게 된다. 이러한 고찰을 바탕으로, 본 연구에서는 이산 무한궤도를 활용한 접지형 뱀 로봇의 설계를 목표로 설정하였다.

다음은 2.1에서 제시한 각 로봇의 문제점과 설계 목표를 토대로 수립한 다음과 같은 제약 조건을 고려하였다:

1) 접지 조건의 충족: 로봇의 일부가 지면과 접촉한 상태에서 움직이지 말아야 한다. 이는 로봇의 정확한 주행 정보를 위한 조건이다.
2) 곡선 주행 가능: 로봇이 특정 곡률 이상의 경로를 주행할 수 있어야 한다. 본 설계에서는 $1[\mathrm{m}^{-1}]$의 곡률을 최소 곡률 기준으로 설정하였다.
3) 충격 최소화: 로봇의 주행 방식에 의해 차체에 가해지는 충격을 최소화해야 한다. 이는 가속도 센서의 활용을 위한 조건이다.
4) 차체 요동 최소화: 로봇의 구동에 필요한 공간의 폭과 로봇의 흔들림을 최소화한다. 전자는 협소 공간 탐사를 위한 조건이며, 후자는 영상 처리를 위한 영상 촬영 시 발생하는 흔들림을 최소화하기 위함이다.

2.3. 설계 과정: ADCR(articulated discrete caterpillar robots)

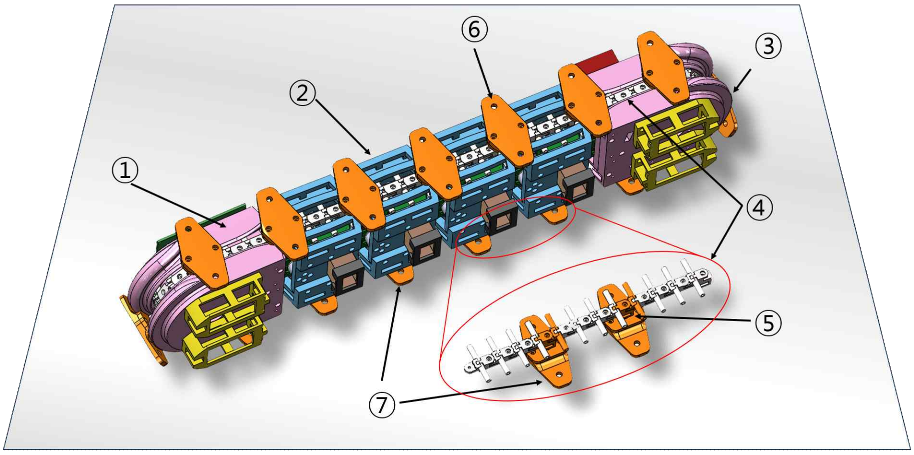
본 보고서에서 제안하는 새로운 형태의 로봇을 articulated discrete caterpillar robots(이하 편의상 로봇으로 칭함)으로 명명한다. ACDR의 구조는 그림 4와 같으며, 평면상에서 주행한다는 것이 대전제이다. 그림 4에서 볼 수 있듯이 제안된 로봇의 형상과 구동 방식은 다소 복잡하다. 때문에 용어를 먼저 명확히 정의하여, 독자의 이해를 돕는 동시에 혼동의 소지를 줄이고자 한다.

2.3.1 관련 용어 및 구동 방식

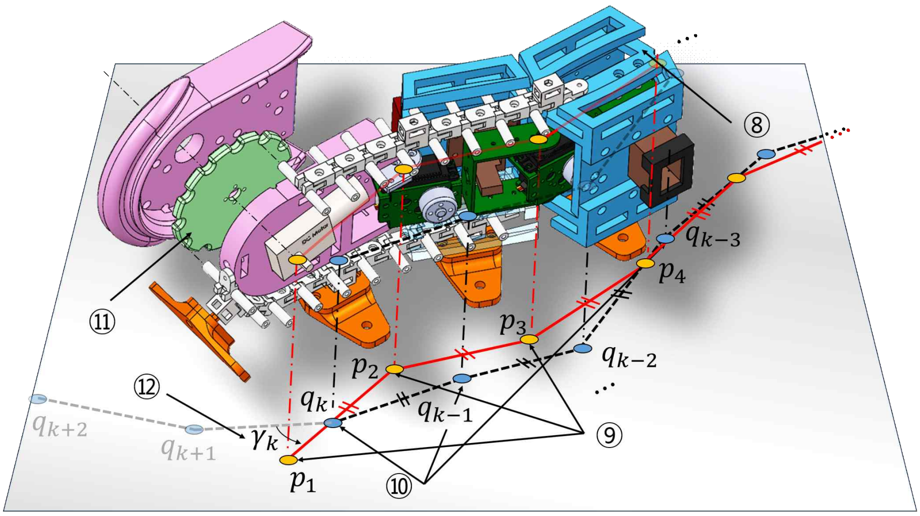
정의 1. 로봇의 몸통을 구성하는 강체 재질의 개별 링크를 **마디(segment)**라 칭한다. 진행 방향을 따라 가장 앞부분을 **머리 마디(head segment)**, 가장 뒷부분을 **꼬리 마디(tail segment)**, 그리고 그 밖의 마디를 **몸통 마디(body segment)**라 부른다. 인접한 두 마디가 이어지는 부분 중에서 높이가 h인 점을 **관절(joint)**이라 부른다[1]. 머리 마디 쪽 관절을 **1번 관절**, 그 다음 관절을 2번 관절과 같이 순차적으로 정의한다.(그림 4(a) 참고.) ■

정의 2. 로봇의 무한궤도를 구성하는 각 요소를 **체인(chain)**이라 한다. 지면과 직접적으로 접촉될 수 있는 로봇의 부위를 **패드(pad)**라 하며, 지면과 실제 접촉해 있는 패드를 **접지 패드(grounded pad)**라 한다. 체인들 중에서 접지 패드와 체결된 체인을 **접지 체인(grounded chain)**이라 부른다. 체인의 로봇의 진행 방

1) 평면상에서 주행하는 로봇인 관계로 높이 h는 어떤 값이어도 무방하다. 이 높이 h는 곧 정의될 구동점, 경유점 등이 유일하게 결정되도록 도입한 값일 뿐이다.



(a) ADCRs with an enlarged view of chains and grounded pads.



(b) An exploded view of ADCRs with control nodes and stopovers provided.

①	head segment
②	body segment
③	tail segment
④	chain
⑤	grounded chain
⑥	pad
⑦	grounded pad
⑧	chain path-through
⑨	control node
⑩	stopover
⑪	sprocket wheel
⑫	steering angle at head segment

Fig. 4 A 3D model of articulated discrete caterpillar robots.

향으로의 길이를 **체인 길이(chain length)**라 부르며 d로 표기한다. 한편, 로봇의 각 마디에는 체인이 지나가는 통로가 있는데, 이를 **체인 통로(chain path-through)**라 한다.(그림 4 참고.) ■

가정 1.[2] 로봇의 몸통 마디는 n개이며, 모든 몸통 마디들의 길이와 모든 인접한 두 패드의 중심들 간의 거리는 모두 L로 동일하다. 아울러 몸통 마디 하나의 길이는 N개 체인의 총 길이와 같다. 즉, $L=Nd$가 성립한다. ■

몸통 마디가 n개이면 마디의 총 개수는 $n+2$개(머리 및 꼬리 마디 포함)임에 유의하라. 그림 4는 $n=4$, $N=3$일 때의 로봇의 3D 모델이다.

2) 본 보고서에서 등장하는 가정들은 사실상 현실적 제약조건에 해당하며, 로봇을 실제 구현할 시 이러한 조건들이 고려되어야 한다. 본 보고서의 3절을 참고하라.

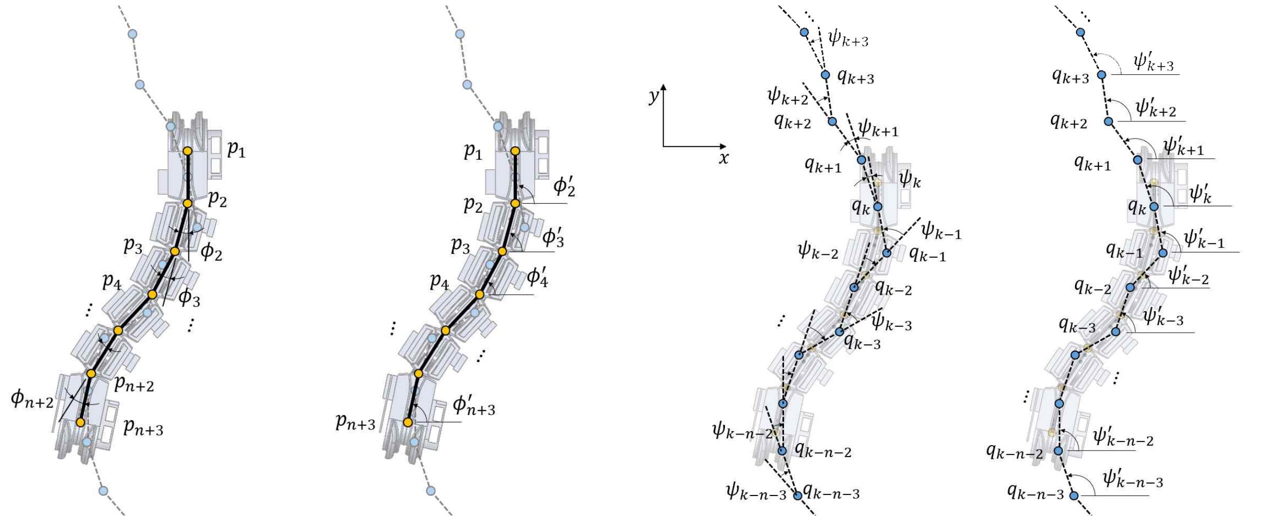


Fig. 5 Control angles, absolute control angles, passing angles, and absolute passing angles, from left.

정의 3. 로봇의 **구동점(control node)**이란 로봇의 기하적 형상을 결정하는 점들로, 아래의 점들로 구성된다.

a) **첫 번째 구동점(머리 구동점)**: 머리 마디 쪽 관절로부터 거리가 L만큼 떨어진, 머리 마디의 대칭축 상에서 높이가 h인 점이다.

b) **i번째 구동점, $i=2,\cdots,n+2$(내부 구동점)**은 $i-1$번 관절로 정의한다.

c) **$n+3$번째 구동점(꼬리 구동점)**: 꼬리 마디 쪽 관절로부터 거리가 L만큼 떨어진, 꼬리 마디의 대칭 축상에서 높이가 h인 점이다.

좌표평면상에서의 각 구동점의 좌표를 $p_i \in \mathbb{R}^2$, $i=1,2,\cdots,n+3$로 나타낸다. $j=2,3,\cdots,n+2$일 때, 구동점 p_{j-1}에서 p_j 방향으로 연장한 반직선과 선분 $\overline{p_j p_{j+1}}$가 이루는 각을 **j번째 구동각(jth control angle)**이라 하며, ϕ_j로 나타낸다. 편의상, $\phi_1=\phi_{n+3}=0$으로 정의한다. 한편, 전역 좌표계에서 양의 x-축 방향과 $\overline{p_{j-1}p_j}$가 이루는 각도를 **j번째 절대 구동각(jth absolute control angle)** $\phi_j{}'$이라 한다. 여기서 $j=2,3,\cdots,n+3$이고, $\phi_1{}'$은 $\phi_1{}'=0$으로 정의한다.(그림 4(b)와 5 참고.) ■

몸통 마디가 n개이면 구동점은 총 $n+3$개임에 유의하라. 참고로, 실제 구현 시, 머리와 꼬리 구동점에는 DC 모터의 축이, 내부 구동점에는 서보 모터의 축이 각각 배치된다.(3절 참고.)

보조정리 1. 가정 1이 만족되면, 접지 패드의 개수는 항상 $n+2$ 또는 $n+3$이다. ■

증명. 가정 1과 정의 3에 따르면, 임의의 인접한 두 패드 간 거리와 임의의 인접한 두 구동점 사이의 거리가 서로 같다. 따라서 구동점의 위치와 접지 패드의 중심이 정확히 일치할 경우, 접지 패드의 개수는 $n+3$이다. 그 외에는 $n+2$이다. □

다음 가정은 로봇의 물리적 구조로 인하여 발생하는 제약조건을 기술한 것으로써, 가령 몸통 마디들의 구조를 모두 대칭으로 설계하면 쉽게 만족된다.

가정 2. $j=2,3,\cdots,n+2$일 때, 각 구동점에서 물리적으로 가능한 최대, 최소 각도는 각각 $\phi_{j,\max}>0$, $-\phi_{j,\max}<0$이다. ■

가정 2가 만족된다면, 모든 구동점에서 물리적으로 가능한 최대, 최소 각도를 찾을 수 있다. 즉, $\phi_{\max} = \min\{\phi_{2,\max},\cdots,\phi_{n+2,\max}\}$로 정의하면 된다. 이때의 $\phi_{\max}$를 **최대 구동각**이라 부른다. 참고로, 모든 몸통 마디를 대칭이되 동일하게 설계하면, $\phi_{2,\max} = \cdots = \phi_{n+2,\max} = \phi_{\max}$가 된다.

다음 정의의 경유점은 로봇의 이동 경로를 묘사하기 위해 필요하다.

정의 4. 좌표평면상에서의 m개의 점들($m>1$)의 수열 $\{q_1,q_2,\cdots,q_m\}$을 고려하자. 각 $i=2,3,\cdots,m$에 대하여 $\overline{q_{i-1}q_i}$의 길이가 모두 L로 같을 때, 점 $q_1,q_2,\cdots,q_m$을 **경유점(stopover)**이라 하며, q_i를 **i번째 경유점**이라 칭한다. 접지 패드의 초기 개수를 n_0라 할 때(보조정리 1 참고), $m>n_0$를 만족하면 수열 $\{q_1,q_2,\cdots,q_m\}$을 **로봇의 이동 경로 또는 주행 경로(path)**라 한다. $j=2,3,\cdots,m-1$일 때, 경유점 q_{j-1}에서 q_j 방향으로 연장한 반직선과 $\overline{q_jq_{j+1}}$가 이루는 각을 **j번째 경유각(jth passing angle)**이라 하며, ψ_j로 나타낸다. 편의상, $\psi_1 = \psi_m = 0$으로 정의한다. 전역 좌표계에서 양의 x-축 방향과 $\overline{q_jq_{j+1}}$가 이루는 각을 **j번째 절대 경유각(jth absolute passing angle)** $\psi_j{}'$이라 한다. 여기서 $j=1,2,\cdots,m-1$이며, $\psi_m{}'$은 $\psi_m{}'=0$으로 정의한다.(그림 4(b)와 5 참고.) ■

로봇의 이동 경로가 주어진 상태에서, 로봇의 초기 위치가 다음과 같이 설정되었다고 가정해보자: 처음 n_0개의 경유점들과 접지 패드들의 중심의 위치가 일치한다. 그러면 로봇이 이동함에 따라, n_0+1번째 경유점을 다음 접지 패드가 지나가도록 구동각을 적절히 제어할 수 있다. 이러한 방식으로, 접지 패드들의 중심이 모든 경유점들을 순차적으로 통과하도록 제어 가능하다. 이때, 머리 마디에 위치한 접지 패드의 중심과 맞닿아 있는 경유점을 **머리 경유점(head stopover)**이라 하며, 특별히 밑첨자 k를 사용하여 q_k로 나타낸다. 반면에 꼬리 마디의 접지 패드 중심에 위치한 경유점을 **꼬리 경유점(tail stopover)**라 한다.

가정 2에서처럼 구동각은 물리적 제약조건을 갖는다. 따라서 로봇의 이동 경로 또한 제약조건을 가질 수 밖에 없으며, 이는 자연스럽게 경유각에 부과된다.

가정 3. $j=2,3,\cdots,m-1$일 때, 각 경유점에서 가능한 최대, 최소 각도는 각각 $\psi_{j,\max}>0$와 $-\psi_{j,\max}<0$이다. 또한 경유각과 최대 구동각 사이에는 $\psi_{j,\max} \le \phi_{\max}$, $j=2,3,\cdots,m-1$이 성립한다. ■

$\psi_{\max} = \max\{\psi_{2,\max},\cdots,\psi_{m-1,\max}\}$를 **최대 경유각**이라 하자. 그러면 가정 3이 만족될 때, $\psi_{\max} \le \phi_{\max}$가 성립함을 쉽게 알 수 있다.

정의 5. 머리 경유점을 q_k라 하자. $i=1,2,\cdots,n+3$에 대하여, 구동점 p_i와 경유점 q_{k-i+1} 사이의 거리를 **i번째 행정 거리(passing distance)**라 한다. 로봇이 진행함에 따라, 행정 거리 v_i는 시간에 대한 함수가 되며, 이 함수의 1계 및 2계 미분계수를 **행정 속도(passing velocity)**와 **행정 가속도(passing acceleration)**라고 각각 칭한다. $\overline{p_iq_{k-i}}$의 길이를 **i번째 잔여 행정 거리(remaining passing distance)**라 하고, w_i로 쓴다. ■

가령, 그림 4(b)에서 첫 번째 행정 거리는 $\overline{p_1q_k}$의 길이, 두 번째 행정 거리는 $\overline{p_2q_{k-1}}$의 길이와 같은 방식으로 정의된다.

정의 6. 머리 경유점을 q_k라 하자. 그러면 $\overline{p_1p_2}$와 $\overline{q_kq_{k+1}}$이 이루는 각도, 즉, $\angle p_1q_kq_{k+1}$를 **머리 조향각 (steering angle at head segment)** γ_k라 한다. 마찬가지로 $\angle p_{n+2}q_{k-n-2}q_{k-n-1}$를 **꼬리 조향각(steering angle**

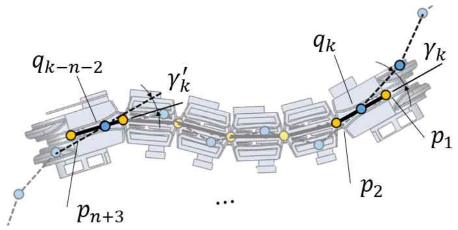


Fig. 6 Steering angles at head and tail segments.

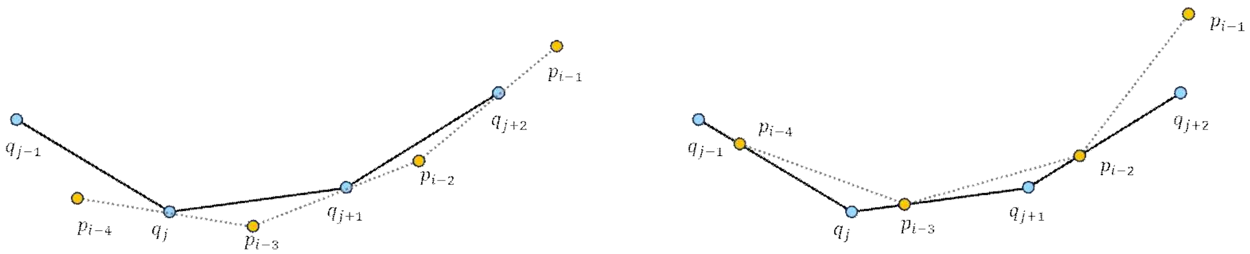


Fig. 7 A stopover is placed on a line connecting two consecutive control nodes (left); a control node is placed on a line between two consecutive stopovers (right).

at tail segment) $\gamma_k{}'$이라 한다.(그림 6과 4(b) 참고.) ■

2.3.2. 기구학적 분석: 구속 조건(행정 거리, 구동각 등)의 계산

본 절에서는 로봇의 기구학적 분석을 위하여, 행정거리, 구동각 등에 대한 변위 조건을 기술하고 정량적 계산을 역시 수행한다. 이를 기반으로 하여, 실제 실험 시 몸통 마디에 위치한 서보 모터들의 각도를 제어한다.

본 보고서에서 제안하는 로봇은 체인과 스프로킷을 이용하여 동력을 전달한다. 스프로킷은 머리와 꼬리 마디에 위치한 DC 모터로부터 회전되며, 이로부터 체인 구동 및 접지 패드를 통한 추력이 발생하여, 종국에는 로봇이 이동한다.(그림 4 참고.) 따라서 머리 마디에서 모터의 힘을 체인이 충분히 받을 수 있도록, 또한 유니버설 체인이 구동에 불필요한 회전 성분을 발생시키지 않도록 하기 위하여, 체인이 체인 통로를 벗어날 수 없는 구조로 설계한다. 꼬리 마디 역시 마찬가지이다. 그러므로 머리와 꼬리 마디에서는 경유점이 $\overline{p_1 p_2}$ 및 $\overline{p_{n+2} p_{n+3}}$ 상에 각각 존재해야 한다. 한편, 로봇의 원활한 경로 추종을 위해서는, 몸통 마디에 별도의 구속 조건을 추가해야 한다.(몸통 마디의 양끝단에 구동점이 위치함을 참고하라.) 원활한 경로 추종을 위한 구속 조건 부여로 아래의 두 가지 경우를 생각할 수 있다.(그림 7 참고.)

a) 인접한 두 구동점들을 잇는 선분에 경유점이 위치하도록 제어하는 경우.

b) 인접한 두 경유점들을 잇는 선분에 구동점이 위치하도록 제어하는 경우.

a)의 경우에는 구동점들이 로봇의 이동 경로 밖에 존재할 수도 있다. 또한, 이 경우, 구동점이 경유점을 지나는 순간을 전후로 하여 구동각이 불연속적일 수 있다.(그림 8 참고.) 반면에, b)의 경우에는 구동점들이 항상 로봇의 이동 경로상에 위치하며, 구동각의 불연속성 또한 나타나지 않는다. 따라서 b)의 방식을 도입한다.

이상의 조건들에도 불구하고 로봇이 실제 구동 가능한지 그 여부를 판별하고자 하며, 이는 로봇의 자유도(degree of freedom)를 구하여 확인할 수 있다. 로봇의 링크(머리, 꼬리, 몸통 마디)는 $n+2$개, 관절은 $n+1$개이고, 평면 운동을 가정하고 프레임(로봇이 지표면에 고정된 상황이 아님)이 따로 존재하지 않는다. 따라서 구속 조건을 고려하지 않은, 로봇 자체의 자유도는

$$DoF_{\text{unconstrained}} = 3(n+2) - 2(n+1) = n+4$$

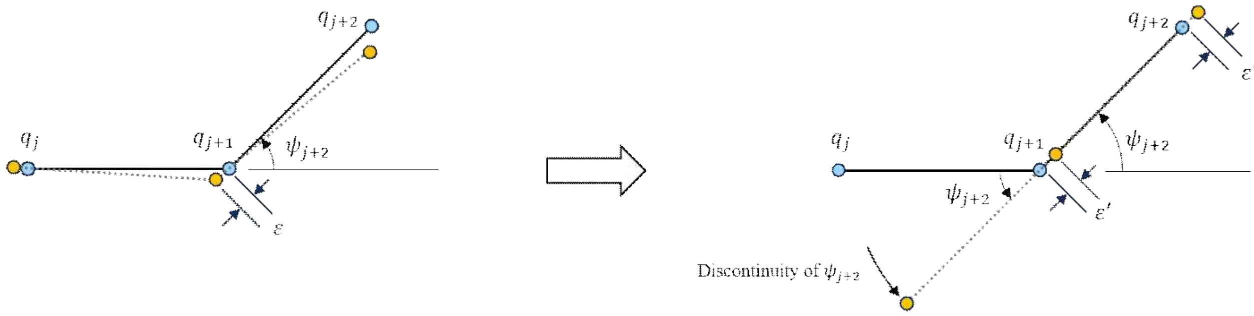


Fig. 8 A discontinuity in control angle may appear when an ADCR tracks a given path. Note that stopovers are placed at body segments.

이다. 이제 앞에서 언급한 구속 조건들을 고려하자. 머리와 꼬리 마디가 각각 머리 및 꼬리 경유점을 지나야 하므로 2개의 구속 조건이 생긴다. 또한, 경우 b)로부터, 각 구동점이 이동 경로 상에 존재해야 하므로, 구동점 당 하나의 구속 조건이 추가된다. 단, 앞의 머리와 꼬리 마디 구속 조건으로 인하여 1번과 $n+3$번 구동점은 여기서 제외되며(구동점의 총 개수가 $n+3$임에 유의), 2번과 $n+2$번 역시 제외되어야 한다. 이는 그렇지 않을 경우, 곡선 주행이 불가능해지게 되기 때문이다. 정리하자면, 머리 및 꼬리 마디에 의한 구속 조건 2개, 내부 구동점에 의한 구속 조건 $n-1$개를 반영한 로봇의 최종 자유도는

$$DoF = n+4-2-(n-1) = 3$$

이다. 결국 로봇의 자유도가 1 이상이므로, 본 보고서에서 제안한 로봇은 구동 가능하다.

본 보고서에서 제안하는 로봇은 평면상에서의 구동을 대전제로 한다. 따라서 로봇의 자유도가 2였다면, 로봇의 조향과 첫 번째 행정 거리를 제어 변수로 두면 된다. 그러나 자유도가 3인 관계로, 본 보고서에서는 로봇의 첫 번째 행정 거리, 머리 조향각, 꼬리 조향각을 제어 변수로 둔다. 즉, 이들 제어 변수가 결정되면, 나머지 행정 거리와 모든 구동각 등이 결정되며, 그에 따라 로봇의 전체 자세가 결정된다. 이상의 논의에 기인하여, 2.3.2-a)에서는 $2,3,\cdots,n+2$번째 행정 거리, 2.3.2-b)에서는 모든 구동각의 계산을 다루며, 2.3.3에서는 머리 및 꼬리 조향각을 결정하는 방법을 제시한다. 참고로, 첫 번째 행정 거리는 머리 마디에 부착된 DC 모터의 각 변위와 비례한다. 따라서 DC 모터의 회전량을 조절하여 첫 번째 행정 거리를 자유롭게 제어할 수 있으므로, 본 보고서에서 이에 대한 별도의 결정 방법을 제시하지 않는다.

<u>2.3.2-a)</u> $2,\cdots,n+2$번째 행정 거리의 계산

첫 번째 행정 거리 v_1과 머리 조향각 γ_k가 제어 변수들이므로, 본 세부 절에서는 이들이 이미 주어졌다고 가정한다. 그런 후, 나머지 행정 거리들을 머리, 몸통, 꼬리 마디에 따라 순차적으로 구한다. 참고로 행정 거리는 구동각을 구하기 위한 중간 과정으로 사용되며, 구동각은 로봇의 동역학적 모델을 이끌어 내는데 활용된다. 로봇의 동역학적 모델과 관련해서는 2.3.4절을 참고한다.

먼저, 그림 9를 참고하여 머리 마디에서의 행정 거리를 구하고자 한다. 첫 번째 행정 거리 v_1이 주어졌으므로, 두 번째 잔여 행정 거리는 $w_2 = L - v_1$이다. 또한, $\angle q_{k-1}q_kp_2 = \psi_k - \gamma_k$이므로, $\triangle q_{k-1}q_kp_2$에 코사인 법칙을 적용하면 두 번째 행정 거리

$$v_2 = \sqrt{L^2 + w_2^2 - 2w_2L\cos(\psi_k - \gamma_k)}$$

를 얻는다. 다음으로 세 번째 행정 거리 v_3를 구하기 위하여, 먼저 세 번째 잔여 행정 거리 w_3를 구한다. $\alpha_{k-1} := \angle q_kq_{k-1}p_2$로 정의하고, $\triangle q_kq_{k-1}p_2$에 사인 법칙을 적용하면 $v_2\sin\alpha_{k-1} = w_2\sin(\psi_k - \gamma_k)$를 얻는다. 따라서

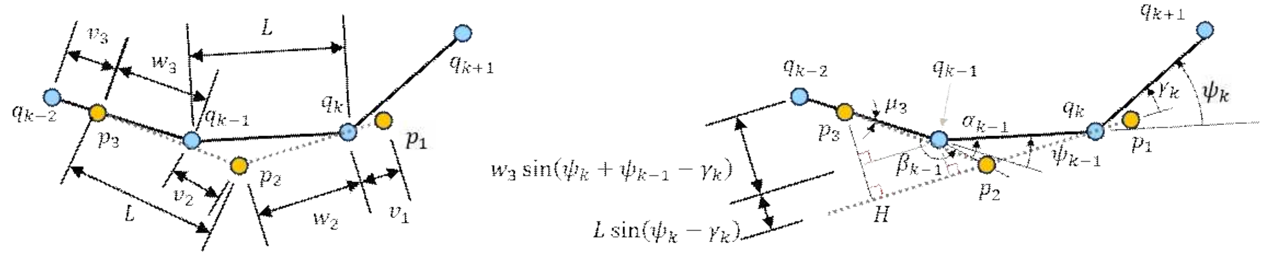


Fig. 9 Skeletal diagram at head segment.

$$\alpha_{k-1}=\sin^{-1}\left(\frac{w_2}{v_2}\sin(\psi_k-\gamma_k)\right)$$

이 된다. 이렇게 구한 α_{k-1}과 $\triangle p_3q_{k-1}p_2$의 한 내각 $\beta_{k-1}=\angle p_3q_{k-1}p_2$, 경유각 ψ_{k-1} 사이에는 $\beta_{k-1}+\alpha_{k-1}+(\pi-\psi_{k-1})=2\pi$이 성립하므로, $\beta_{k-1}=\pi+\psi_{k-1}-\alpha_{k-1}$를 얻는다. 이제 $\triangle p_3q_{k-1}p_2$에 코사인 법칙을 적용하면, 세 번째 잔여 행정 거리에 관한 식

$$w_3^2+v_2^2-2w_3v_2\cos(\pi+\psi_{k-1}-\alpha_{k-1})=w_3^2+v_2^2+2w_3v_2\cos(\alpha_{k-1}-\psi_{k-1})=L^2$$

을 얻는다. 이는 w_3에 관한 이차 방정식이므로, 근의 공식을 적용하면

$$\begin{aligned}w_3&=-v_2\cos(\alpha_{k-1}-\psi_{k-1})\pm\sqrt{v_2^2\cos^2(\alpha_{k-1}-\psi_{k-1})-v_2^2+L^2}\\&=-v_2\cos(\alpha_{k-1}-\psi_{k-1})\pm\sqrt{L^2-v_2^2\sin^2(\alpha_{k-1}-\psi_{k-1})}\end{aligned}$$

을 얻는다. $w_3\geq 0$이고 $v_2\leq L$이므로, 최종적으로 세 번째 잔여 행정 거리 w_3는

$$w_3=\sqrt{L^2-v_2^2\sin^2(\alpha_{k-1}-\psi_{k-1})}-v_2\cos(\alpha_{k-1}-\psi_{k-1})$$

으로 주어진다. 따라서 세 번째 행정 거리는

$$\begin{aligned}v_3&=L-w_3\\&=L-\sqrt{L^2-v_2^2\sin^2(\alpha_{k-1}-\psi_{k-1})}+v_2\cos(\alpha_{k-1}-\psi_{k-1})\end{aligned}$$

이다. 가정 1, 정의 3과 4로부터 $\overline{p_1p_2}$, $\overline{p_2p_3}$, $\overline{q_kq_{k-1}}$, $\overline{q_{k-1}q_{k-2}}$의 길이가 모두 L과 같음에 유의하라.

다음으로, 몸통 마디에서의 행정 거리를 구한다. 이는 i번째 행정 거리 v_i가 주어졌다고 가정한 후, $i+1$번째 행정 거리를 구하는 방식으로 진행한다.(그림 10 참고.) $\triangle p_{i+1}q_{k-i+1}p_i$의 세 변의 길이가 w_{i+1}, v_i, L이고 $\angle p_{i+1}q_{k-i+1}p_i=\pi-\psi_{k-i+1}$이므로, 코사인 법칙에 의하여

$$L^2=w_{i+1}^2+v_i^2-2v_iw_{i+1}\cos(\pi-\psi_{k-i+1})=w_{i+1}^2+v_i^2+2v_iw_{i+1}\cos\psi_{k-i+1}$$

이다. 위 이차 방정식을 근의 공식을 이용하여 풀면 $w_{i+1}=-v_i\cos\psi_{k-i+1}\pm\sqrt{v_i^2\cos^2\psi_{k-i+1}-v_i^2+L^2}$ $=-v_i\cos\psi_{k-i+1}\pm\sqrt{L^2-v_i^2\sin^2\psi_{k-i+2}}$을 얻는다. 역시나 $w_{i+1}\geq 0$이고 $v_i\leq L$이므로

$$w_{i+1}=\sqrt{L^2-v_i^2\sin^2\psi_{k-i+2}}-v_i\cos\psi_{k-i+1}$$

를 얻고, 이로부터 $i+1$번째 행정 거리를 마침내 다음으로 구한다.

$$\begin{aligned}v_{i+1}&=L-w_{i+1}\\&=L-\sqrt{L^2-v_i^2\sin^2\psi_{k-i+2}}+v_i\cos\psi_{k-i+1}\end{aligned}$$

마지막으로, 꼬리 마디를 다루고자 하고, 이를 위하여 $n+1$번째 행정 거리 v_{n+1}과 제어 변수 중 하나인 꼬리 조향각 γ_k'이 주어졌다고 가정한다.(그림 11 참고.) 우선 $\overline{q_{k-n-1}p_{n+1}}$의 길이를 D라 하자.

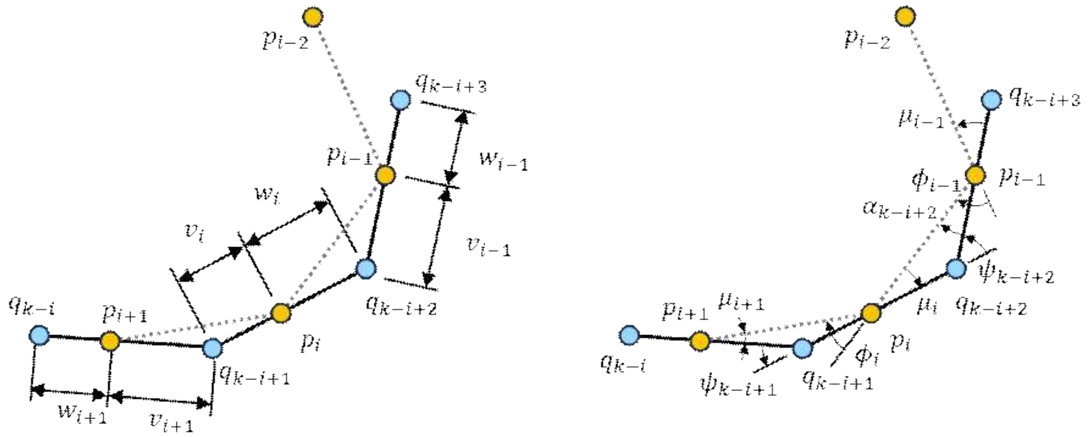


Fig. 10 Skeletal diagram at i-th body segment.

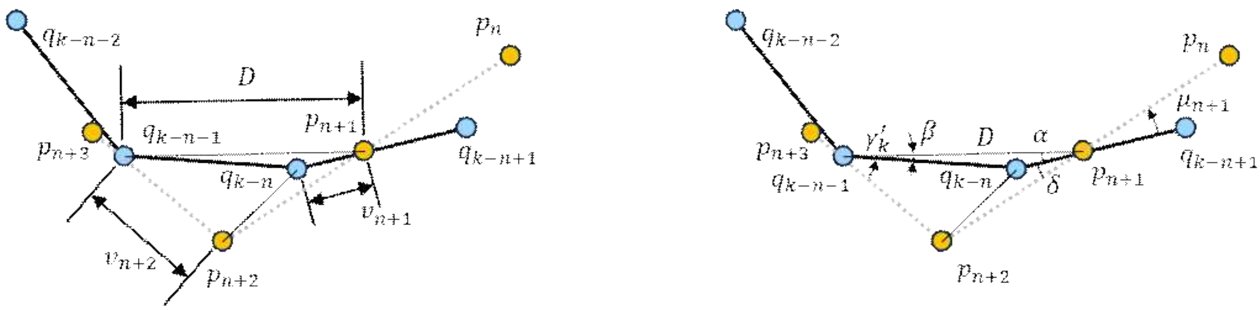


Fig. 11 Skeletal diagram at tail segment.

$\triangle q_{k-n-1}q_{k-n}p_{n+1}$에 코사인 법칙을 적용하면, $D^2 = L^2 + v_{n+1}^2 - 2v_{n+1}L\cos(\pi - \psi_{k-n}) = L^2 + v_{n+1}^2 + 2v_{n+1}L\cos(\psi_{k-n})$을 얻는다. 즉,

$$D = \sqrt{L^2 + v_{n+1}^2 + 2v_{n+1}L\cos\psi_{k-n}}$$

이다. 이제 $\beta := \angle q_{k-n}q_{k-n-1}p_{n+1}$라 정의하고, $\triangle q_{k-n}q_{k-n-1}p_{n+1}$에 사인 법칙을 적용하면, $D\sin\beta = v_{n+1}\sin(\pi - \psi_{k-n}) = v_{n+1}\sin\psi_{k-n}$이다. 따라서

$$\beta = \sin^{-1}\left(\frac{v_{n+1}}{D}\sin\psi_{k-n}\right)$$

이다. 이번에는 $\triangle q_{k-n-1}p_{n+2}p_{n+1}$에 코사인 법칙을 적용하면, $v_{n+2}^2 + D^2 - 2v_{n+2}D\cos(\beta + \gamma_k') = L^2$을 얻고, 앞에서와 같은 방법으로 v_{n+2}에 대하여 풀면 $v_{n+2} = D\cos(\beta + \gamma_k') \pm \sqrt{L^2 - D^2\sin^2(\beta + \gamma_k')}$을 얻는다. 이때 $\beta + \gamma_k' \to 0$이면 $p_{n+2} \to q_{k-n-1}$이고 $p_{n+1} \to q_{k-n}$이어야 한다. 따라서 $v_{n+1} \to 0$이어야 하므로, $n+2$번째 행정 거리는

$$v_{n+2} = D\cos(\beta + \gamma_k') - \sqrt{L^2 - D^2\sin^2(\beta + \gamma_k')}$$

으로 주어진다.

2.3.2-b) 구동각의 계산

먼저 머리 마디에서의 구동각 ϕ_2를 구한다. $\phi_1 = 0$임을 참고하라.(정의 3) 그림 9를 참고하여, 구동점

p_3에서 $\overline{p_1p_2}$에 내린 수선의 발을 H라 하고 $\overline{p_3H}$의 길이를 λ라 하면, $\triangle p_2Hp_3$로부터 $\lambda = L\sin\angle p_3p_2H = L\sin\phi_2$가 성립한다. 즉, $\phi_2 = \sin^{-1}(\lambda/L)$이다. 또한

$$\lambda = L\sin(\psi_k-\gamma_k)+w_3\sin\left(\pi-\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}-(\psi_k-\gamma_k)-\psi_{k-1}\right)\right)$$

이므로, 두 번째 구동각은

$$\phi_2 = \sin^{-1}\left(\frac{\lambda}{L}\right)= \sin^{-1}\left(\sin(\psi_k-\gamma_k)+\frac{w_3}{L}\sin(\psi_k+\psi_{k-1}-\gamma_k)\right) \tag{1}$$

로 주어진다.

다음으로 몸통 마디에서의 구동각을 구한다.(그림 10 참고.) $\alpha_{k-i+2} := \angle p_ip_{i-1}q_{k-i+2}$로 정의하고, $\triangle p_ip_{i-1}q_{k-i+2}$에 사인 법칙을 적용하면, $L\sin\alpha_{k-i+2} = w_i\sin(\pi-\psi_{k-i+2})$를 얻는다. 즉,

$$\alpha_{k-i+2} = \sin^{-1}\left(\frac{w_i}{L}\sin\psi_{k-i+2}\right) \tag{2}$$

를 얻는다. 또한, 구동각 ϕ_{i-1}은 그림 10으로부터

$$\phi_{i-1} = \mu_{i-1}+\alpha_{k-i+2} \tag{3}$$

임을 알 수 있다. $\triangle p_ip_{i-1}q_{k-i+2}$의 한 내각 $\mu_i := \angle p_{i-1}p_iq_{k-i+2}$[3]에 대하여 사인 법칙을 이용하면, $L\sin\mu_i = v_{i-1}\sin(\pi-\psi_{k-i+2})$를 얻게 되고, 그러므로

$$\mu_i = \sin^{-1}\left(\frac{v_{i-1}}{L}\sin\psi_{k-i+2}\right)$$

가 된다. 이렇게 구한 μ_i와 식 (2)의 α_{k-i+2}를 식 (3)에 대입하면 구동각 ϕ_{i-1}를 구할 수 있다.

마지막으로, 꼬리 마디에서의 구동각 ϕ_{n+2}을 구한다. $\triangle p_{n+1}q_{k-n}q_{k-n-1}$의 두 내각 $\alpha := \angle q_{k-n-1}p_{n+1}q_{k-n}$와 $\beta := p_{n+1}q_{k-n-1}q_{k-n}$에 사인 법칙을 적용하면 $L\sin\beta = v_{n+1}\sin\alpha$가 성립한다. 즉, α는 다음으로 주어진다.

$$\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{L}{v_{n+1}}\sin\psi_{k-n}\right).$$

또한 $\delta = \angle p_{n+2}p_{n+1}q_{k-n}$에 대해서는 $L\sin(\alpha+\delta) = v_{n+2}\sin(\beta+\gamma_k{}')$이 성립하므로,

$$\delta = \arcsin\left(\frac{v_{n+2}}{L}\sin(\beta+\gamma_k{}')\right)$$

다음으로는 각 서보모터의 구동각을 계산한다. $D\sin(\beta+\gamma_k{}') = L\sin\phi_{n+2}$로부터 다음을 얻을 수 있다.

$$\phi_{n+2} = \arcsin\left(\frac{D}{L}\sin(\beta+\gamma_k{}')\right) \tag{3}$$

한편, ϕ_{n+1}에 대해서는 $\phi_{n+1} = \mu_{n+1}-\delta$가 성립한다.

2.3.3. 수치 해석적 분석: 조향각의 결정

로봇의 이동 경로가 주어지면, 앞에서 언급하였듯이 3개의 제어 변수를 이용해 경로를 추종하여야 한다. 첫 번째 행정 거리는 로봇의 각 변위 제어를 통해 임의로 제어 가능하여 논외로 취급할 수 있겠으나, 머리 조향각과 꼬리 조향각은 정확한 경로 추종을 위하여 적절히 결정해주어야 한다. 이를 해결하기

---

3) μ_3은 예외적으로 다음과 같이 계산된다.

$$\mu_3 =-\sin^{-1}\left(\frac{v_2}{L}\sin\beta_{k-1}\right)=-\sin^{-1}\left(\frac{v_2}{L}\sin(\alpha_{k-1}-\psi_{k-1})\right).$$

위한 한 가지 방편으로 수치 해석의 보간법을 들 수 있다[12]. 그 이유는 정의 4에서 보았듯이 로봇의 이동 경로는 등거리에 위치한 점들(경유점들)의 수열과 같으며, 경유점 외의 구간은 크게 문제 되지 않겠으나, 각 경유점은 반드시 로봇이 정확히 거쳐가야 하기 때문이다. 따라서 수치 해석적 알고리즘의 재귀성과 계산 용이성 등을 고려하여, 스플라인 보간법을 활용한 조향각 결정법을 다음에서 제시한다.

2.3.3-a) 머리 조향각의 결정

먼저, 머리 조향각 γ_k를 첫 번째 행정 거리 v_1에 의존하는 다음의 형태로 고려하고자 한다.

$$\gamma_k(v_1) = a_k + b_k v_1 + c_k v_1^2 + d_k v_1^3 + e_k v_1^4.$$

각 계수는 경계 조건과 라그랑주 승수법을 활용하여 결정한다. 즉, $v_1 \to 0$임에 따라 $\gamma_k \to \psi_k$여야 하므로 (그림 9 참고), $\gamma_k(0) = a_k = \psi_k$여야 한다. 다음으로, 로봇의 진행 방향에 따라, $v_1 \to L$이면 $\gamma_k \to 0$여야 하므로 $\gamma_k(L) = a_k + b_k L + c_k L^2 + d_k L^3 + e_k L^4 = 0$을 만족해야 한다. 한편, 그림 9에서 보듯이, 머리 조향각 γ_k는 머리 마디($\overline{p_1 p_2}$)가 경유점 q_k를 지날 때의 조향각이다. 마찬가지로 γ_{k+1}은 경유점 q_{k+1}가 $\overline{p_1 p_2}$ 위에 있을 때의 조향각이다. 머리 마디가 $q_k \to q_{k+1}$로 지나감에 따라, v_1은 $L \to 0$로 변화한다. 따라서 로봇의 부드러운 주행을 보장하기 위해서는 다음 조건이 필요하다.

$$\frac{d\gamma_k}{dv_1}(L) = \frac{d\gamma_{k+1}}{dv_1}(0) \quad \Leftrightarrow \quad b_{k+1} = b_k + 2c_k L + 3d_k L^2 + 4e_k L^3.$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

$$a_k = \psi_k, \tag{5-a}$$

$$a_k + b_k L + c_k L^2 + d_k L^3 + e_k L^4 = 0, \tag{5-b}$$

$$b_{k+1} = b_k + 2c_k L + 3d_k L^2 + 4e_k L^3. \tag{5-c}$$

식 (5-c)는 b에 대한 점화식이므로 b_k는 $a_1, b, \cdots, e_1$에 의하여 결정된다. 식 (5-a)에 의해 a_k 역시 결정되므로, 최종적으로 유의미한 조건식은 (5-b)뿐이며, 이때 결정해야 하는 변수는 c_k, d_k, e_k이다.

위의 논의로부터, 머리 조향각을 결정하기 위해서는 식이 하나, 변수가 3개인 부정정 문제(statically indeterminate problem)를 풀어야 하며, 이를 위해 라그랑주 승수법을 도입한다. 다음의 비용 함수를 고려하자.

$$J_{\text{head}} = \int_0^L \gamma_k^2 + \left(\frac{d\gamma_k}{dv_1}\right)^2 dv_1.$$

여기서 γ_k^2은 머리 조향각의 크기를, $(d\gamma_k/dv_1)^2$은 머리 조향각의 급격한 변화를 최소화시키기 위한 항들이다. $G(c_k, d_k, e_k) := a_k + b_k L + c_k L^2 + d_k L^3 + e_k L^4$을 정의하면, 비용 함수 J_{head}와 구속 조건 $G = 0$에 라그랑주 승수법을 적용해 다음을 얻는다.

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial G}{\partial c_k} \\ \dfrac{\partial G}{\partial d_k} \\ \dfrac{\partial G}{\partial e_k} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \dfrac{\partial J_{\text{head}}}{\partial c_k} \\ \dfrac{\partial J_{\text{head}}}{\partial d_k} \\ \dfrac{\partial J_{\text{head}}}{\partial e_k} \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial c_k}\frac{\partial J_{\text{head}}}{\partial d_k} - \frac{\partial G}{\partial d_k}\frac{\partial J_{\text{head}}}{\partial c_k} &= 0, \\ \frac{\partial G}{\partial d_k}\frac{\partial J_{\text{head}}}{\partial e_k} - \frac{\partial G}{\partial e_k}\frac{\partial J_{\text{head}}}{\partial d_k} &= 0. \end{aligned}$$

정리하자면, 다음 세 수식을 연립하여 풀어 최적의 계수 수열 c_k, d_k, e_k을 구할 수 있다.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial G}{\partial c_k}\dfrac{\partial J_{\text{head}}}{\partial d_k} - \dfrac{\partial G}{\partial d_k}\dfrac{\partial J_{\text{head}}}{\partial c_k} = 0, \\ \dfrac{\partial G}{\partial d_k}\dfrac{\partial J_{\text{head}}}{\partial e_k} - \dfrac{\partial G}{\partial e_k}\dfrac{\partial J_{\text{head}}}{\partial d_k} = 0, \\ G(c_k, d_k, e_k) = 0. \end{cases}$$

즉, 머리 조향각 γ_k를 이상의 방법론으로 결정할 수 있다.

2.3.3-b) 꼬리 조향각의 결정

꼬리 조향각 역시 머리 조향각의 경우와 유사하게 결정할 수 있다. 꼬리 조향각 $\gamma_k{}'$을 행정 거리 v_{n+1}에 대한 다음 함수로 생각하자.

$$\gamma_k{}'(v_{n+1}) = a_k{}' + b_k{}' v_{n+1} + c_k{}' v_{n+1}^2 + d_k{}' v_{n+1}^3 + e_k{}' v_{n+1}^4.$$

경계 조건을 고려해보면(그림 11 참고), $v_{n+1} \to 0$이면 $\gamma_k{}' \to \psi_{k-n-1}$이어야 하고, $v_{n+1} \to L$이면 $\gamma_k{}' \to 0$이어야 한다. 또한, $v_{n+1} \to 0$ 또는 $v_{n+1} \to L$일 때, 조향각의 변화율이 0으로 수렴해야 한다. 이상으로

$$\gamma_k{}'(0) = \psi_{k-n-1}, \quad \gamma_k{}'(L) = 0, \quad \left.\frac{d\gamma_k{}'}{dv_{n+1}}\right|_{v_{n+1}=0} = \left.\frac{d\gamma_k{}'}{dv_{n+1}}\right|_{v_{n+1}=L} = 0$$

와 같은 조건들을 얻는다. 즉,

$$\begin{aligned} &\gamma_k{}'(0) = a_k{}' = \psi_{k-n-1}, && b_k{}' = 0, \\ &\gamma_k{}'(L) = a_k{}' + c_k{}' L^2 + d_k{}' L^3 + e_k{}' L^4 = 0, && 2c_k{}' L + 3d_k{}' L^2 + 4e_k{}' L^3 = 0. \end{aligned}$$

이 식 역시 3개의 변수와 2개의 구속 조건을 가지므로, 비용 함수 $J_{\text{tail}} = \int_0^L \gamma_k{}'^2 + \left(\dfrac{d\gamma_k{}'}{dv_{n+1}}\right)^2 dv_{n+1}$를 이용하여 라그랑주 승수법을 적용한다. 먼저, $\overrightarrow{\nabla} := \left[\dfrac{\partial}{\partial c_k} \quad \dfrac{\partial}{\partial d_k} \quad \dfrac{\partial}{\partial e_k}\right]^\top$ 와 같이 정의하고, 구속 조건이 2개이므로 $\overrightarrow{\nabla} J_{\text{tail}} = \lambda_1 \overrightarrow{\nabla} G_1 + \lambda_2 \overrightarrow{\nabla} G_2$이 성립한다. 즉, $\overrightarrow{\nabla} J_{\text{tail}}$은 $\overrightarrow{\nabla} G_1$과 $\overrightarrow{\nabla} G_2$의 선형결합이다. 따라서

$$\det\left[\overrightarrow{\nabla} J_{\text{tail}} \quad \overrightarrow{\nabla} G_1 \quad \overrightarrow{\nabla} G_2\right] = 0$$

이 성립한다. 정리하자면, 다음의 총 3개의 조건식을 얻게 되고, 이로부터 최적의 계수를 구할 수 있다.

$$\begin{cases} \det\left[\overrightarrow{\nabla} J_{\text{tail}} \quad \overrightarrow{\nabla} G_1 \quad \overrightarrow{\nabla} G_2\right] = 0, \\ G_1(c_k, d_k, e_k) = 0, \\ G_2(c_k, d_k, e_k) = 0. \end{cases}$$

2.3.4. 동역학적 분석: 추력 및 모멘트의 계산

2.3.3절의 조건들로부터 각 구동점에서의 물리량들이 결정되면, 각 마디에서의 운동 방정식을 수립할 수 있다. 또한 이 방정식을 풀어, 각 모터의 출력과 머리 및 꼬리 경유점에 가해지는 힘을 계산할 수 있다. 본 절에서는 이 과정을 수행한다.

2.3.4-a) 운동방정식의 정립

각 마디마다 별도의 좌표계를 지정하고, 이를 기준으로 회전 운동과 병진 운동에 대한 운동 방정식을 수립한다. 상세한 계산을 수행하기에 앞서 관련 방향벡터들을 정의한다.(그림 12 참고.) $i = 2, 3, \cdots, n+3$일 때, $\hat{t}_i$는 p_i에서 p_{i-1}로 향하는 단위 벡터, $\hat{n}_i$은 $\hat{t}_i$를 반시계 방향으로 90° 만큼 회전시킨 법선 벡터로 정의한다. 머리와 꼬리 마디에 위치한 DC 모터 2개가 함께 유니버셜 체인을 구동시키는 관계로,

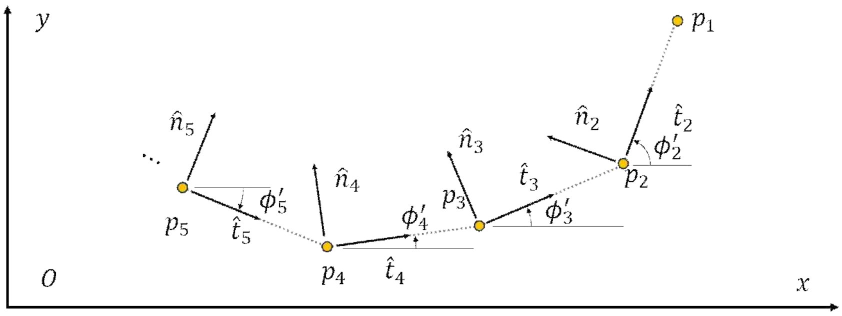


Fig. 12 Local coordinate of each control node and inertial reference frame fixed on earth.

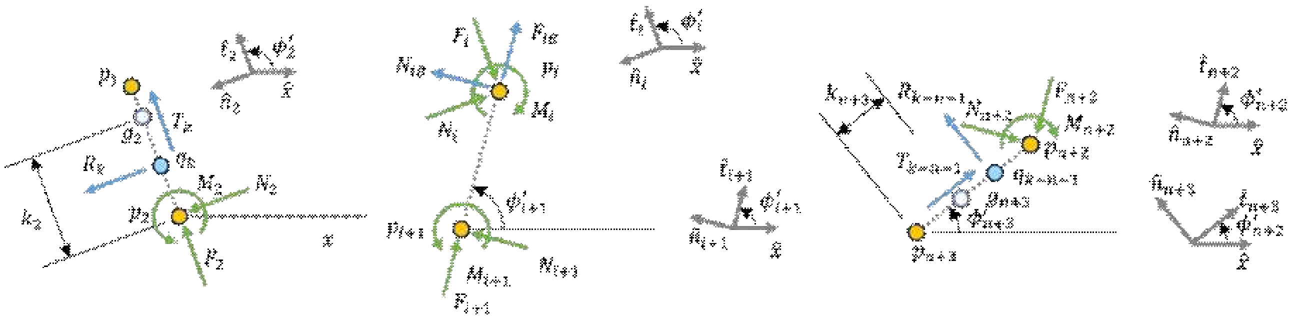


Fig. 13 Free body diagrams of head (left), body (middle), and tail (right) segments.

$T_k = T_{k-n-1}$를 가정한다. 편의상, 유니버셜 체인에 의한 관성과 마찰력은 무시한다.

먼저, 머리 마디에서의 운동 방정식을 구한다.(그림 13의 좌측 그림 참고.) 머리 및 꼬리 마디의 DC 모터의 출력이 유니버셜 체인과 접지 패드를 거쳐 지면으로 전달되어, $\hat{t}_2$ 방향으로 T_k만큼의 추진력과 $\hat{n}_2$ 방향으로 R_k만큼의 횡방향 힘이 가해진다. 또한 두 번째 구동점 p_2에 부착된 서보 모터에 의하여 M_2만큼의 돌림힘과 $F_2\hat{t}_2 + N_2\hat{n}_2$만큼의 힘이 p_2에 가해진다. 구동점 p_2를 원점으로 하는 지표면에 고정된 직교좌표계에 대하여, 이러한 역학 관계를 운동 방정식으로 표현하면 다음과 같다.

$$m_{12}\frac{d^2 g_2}{dt^2} = m_{12}\left(\ddot{p}_2 + k_2\ddot{\phi}'_2\hat{n}_2 - k_2\dot{\phi}'^2_2\hat{t}_2\right) = (T_k + F_2)\hat{t}_2 + (R_k + N_2)\hat{n}_2,$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = m_{12}\left(k_2\hat{t}_2 \times \ddot{p}_2 + k_2\hat{t}_2 \times k_2\frac{d^2\hat{t}_2}{dt^2}\right) + I_{12}\ddot{\phi}'_2\vec{e}_z = (R_k(L - v_1) + M_2)\vec{e}_z.$$

여기서 m_{12}는 머리 마디의 질량, $\vec{L}$은 머리 마디의 각 운동량, I_{12}는 무게 중심에 대한 관성 모멘트, g_2는 머리 마디의 무게 중심의 위치, k_2는 $\overline{p_2 g_2}$의 길이, $\vec{e}_z$는 z축 방향 단위 벡터, L은 마디의 길이이다. 각 단위 벡터의 x-y 좌표계 표현 $\hat{n}_2 = [-\sin\phi_2' \quad \cos\phi_2']^\top$와 $\hat{t}_2 = [\cos\phi_2' \quad \sin\phi_2']^\top$을 사용하면, 다음으로 표현된다.

$$m_{12}\left\{\begin{bmatrix}\ddot{x}_2 \\ \ddot{y}_2\end{bmatrix} + k_2\ddot{\phi}'_2\begin{bmatrix}-\sin\phi'_2 \\ \cos\phi'_2\end{bmatrix} - k_2\dot{\phi}_2'^2\begin{bmatrix}\cos\phi_2' \\ \sin\phi_2'\end{bmatrix}\right\} = (T_k + F_2)\begin{bmatrix}\cos\phi_2' \\ \sin\phi_2'\end{bmatrix} + (R_k + N_2)\begin{bmatrix}-\sin\phi_2' \\ \cos\phi_2'\end{bmatrix},$$

$$m_{12}k_2(\ddot{y}_2\cos\phi'_2 - \ddot{x}\sin\phi'_2) + m_{12}k_2^2\ddot{\phi}'_2 + I_{12}\ddot{\phi}'_2 = R_k(L - v_1) + M_2.$$

위의 식의 좌변이 미지수를 포함하지 않으므로, 계산의 편의를 위해 좌변을 각각 $[A_1 \quad B_1]^\top$과 C_1으로 정의하자. 그러면 머리 마디의 최종 운동 방정식은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi_2{}' & -\sin\phi'_2 & 0 \\ \sin\phi'_2 & \cos\phi'_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_2 \\ N_2 \\ M_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\phi'_2 & -\sin\phi'_2 & 0 \\ \sin\phi'_2 & \cos\phi'_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_k \\ R_k \\ (L-v_1)R_k \end{bmatrix}. \tag{6}$$

다음으로, 몸통 마디에서의 운동 방정식을 구한다.(그림 13의 가운데 그림 참고.) 구동점 p_i와 p_{i+1}을 연결하는 몸통 마디를 고려하자. 여기서 $i=2,3,\cdots,n$이다. 머리나 꼬리 마디의 DC 모터가 몸통 마디에 직접적으로 힘을 미치지 않으므로, 서보 모터에 의한 힘, 돌림힘, 관성력만으로 몸통 마디의 운동이 결정된다. i번째 구동점에서는 $-F_i\hat{t}_i - N_i\hat{n}_i$의 힘과 $-M_i$의 돌림힘이 작용하며, $i+1$번째 구동점에서는 $F_{i+1}\hat{t}_{i+1} + N_{i+1}\hat{n}_{i+1}$의 힘과 M_{i+1}의 돌림힘이 작용한다. 따라서 몸통 마디의 운동 방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & m_{i,i+1}\left\{ \begin{bmatrix} \ddot{x}_{i+1} \\ \ddot{y}_{i+1} \end{bmatrix} + k_{i+1}\ddot{\phi}_{i+1} \begin{bmatrix} -\sin\phi'_{i+1} \\ \cos\phi'_{i+1} \end{bmatrix} - k_{i+1}\dot{\phi}'^2_{i+1} \begin{bmatrix} \cos\phi'_{i+1} \\ \sin\phi'_{i+1} \end{bmatrix} \right\} \\ & \qquad = F_{i+1}\begin{bmatrix} \cos\phi'_{i+1} \\ \sin\phi'_{i+1} \end{bmatrix} + N_{i+1}\begin{bmatrix} -\sin\phi'_{i+1} \\ \cos\phi'_{i+1} \end{bmatrix} - F_i\begin{bmatrix} \cos\phi'_i \\ \sin\phi'_i \end{bmatrix} - N_i\begin{bmatrix} -\sin\phi'_i \\ \cos\phi'_i \end{bmatrix}, \\ & m_{i,i+1}k_{i+1}(\ddot{y}_{i+1}\cos\phi'_{i+1} - \ddot{x}_{i+1}\sin\phi'_{i+1}) + (m_{i,i+1}k_i^2 + I_{i,i+1})\ddot{\phi}'_{i+1} \\ & \qquad = -F_iL\sin\phi_i - N_iL\cos\phi_i - M_i + M_{i+1}. \end{aligned} \tag{7}$$

여기서 $m_{i,i+1}$는 몸통 마디의 질량, $I_{i,i+1}$은 무게 중심에 대한 관성 모멘트, k_{i+1}은 무게 중심 g_{i+1}과 i번째 구동점과의 거리이다. 머리 마디의 경우와 유사하게 식 (7)의 좌변을 각각 $[A_i \quad B_i]^\top$과 C_i으로 정의한다. 그러면 몸통 마디에 대한 운동 방정식

$$\begin{bmatrix} A_i \\ B_i \\ C_i \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \cos\phi'_i & -\sin\phi'_i & 0 \\ \sin\phi'_i & \cos\phi'_i & 0 \\ L\sin\phi_i & L\cos\phi_i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_i \\ N_i \\ M_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\phi'_{i+1} & -\sin\phi'_{i+1} & 0 \\ \sin\phi'_{i+1} & \cos\phi'_{i+1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{i+1} \\ N_{i+1} \\ M_{i+1} \end{bmatrix} \tag{8}$$

을 최종적으로 얻는다.

마지막으로, 꼬리 마디에서의 운동 방정식을 구한다.(그림 13의 우측 그림 참고.) 꼬리 마디에서는 DC 모터에 의한 추진력 $T_{k-n-2}\hat{t}_{n+3}$과 체인에 의한 횡방향 힘 $R_{k-n-2}\hat{n}_{n+3}$이 발생한다. 또한 구동점 p_{n+2}에 부착된 서보 모터로 인하여, 돌림힘 $-M_{n+2}$와 힘 $-F_{n+2}\hat{t}_{n+2} - N_{n+2}\hat{n}_{n+2}$ 역시 가해진다. 따라서 꼬리 마디에서의 운동 방정식은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} A_{n+2} \\ B_{n+2} \\ C_{n+2} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \cos\phi'_{n+2} & -\sin\phi'_{n+2} & 0 \\ \sin\phi'_{n+2} & \cos\phi'_{n+2} & 0 \\ L\sin\phi_{n+2} & L\cos\phi_{n+2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{n+2} \\ N_{n+2} \\ M_{n+2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\phi'_{n+3} & -\sin\phi'_{n+3} & 0 \\ \sin\phi'_{n+3} & \cos\phi'_{n+3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{k-n-1} \\ R_{k-n-1} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{9}$$

여기서 $m_{n+2,n+3}$는 꼬리 마디의 질량, $I_{n+2,n+3}$는 무게 중심에 대한 관성 모멘트, k_{n+3}는 무게 중심 g_{n+3}와 구동점 p_{n+3} 간의 거리이다. 또한 A_{n+2}, B_{n+2}, C_{n+2}는 다음으로 주어진다.

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} A_{n+2} \\ B_{n+2} \end{bmatrix} = m_{n+2n+3}\left\{ \begin{bmatrix} \ddot{x}_{n+3} \\ \ddot{y}_{n+3} \end{bmatrix} + k_{n+3}\ddot{\phi}_{n+3}\begin{bmatrix} -\sin\phi'_{n+3} \\ \cos\phi'_{n+3} \end{bmatrix} - k_{n+3}\dot{\phi}'^2_{n+3}\begin{bmatrix} \cos\phi'_{n+3} \\ \sin\phi'_{n+3} \end{bmatrix} \right\}, \\ & C_{n+2} = m_{n+2n+3}k_{n+3}(\ddot{y}_{n+3}\cos\phi'_{n+3} - \ddot{x}_{n+3}\sin\phi'_{n+3}) + (m_{n+2n+3}k^2_{n+3} + I_{n+2n+3})\ddot{\phi}'_{n+3}. \end{aligned}$$

<u>2.3.4-b)</u> 운동 방정식의 풀이

세부 절 2.3.4-a)에서 구한 운동 방정식들을 정리하면 아래와 같다.

$$
\begin{array}{l|l}
\text{머리 마디} & \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi_2' & -\sin\phi'_2 & 0 \\ \sin\phi'_2 & \cos\phi'_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_2 \\ N_2 \\ M_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\phi'_2 & -\sin\phi'_2 & 0 \\ \sin\phi'_2 & \cos\phi'_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_k \\ R_k \\ (L-v_1)R_k \end{bmatrix}, \\
\hline
\text{몸통 마디} & \begin{bmatrix} A_i \\ B_i \\ C_i \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \cos\phi'_i & -\sin\phi'_i & 0 \\ \sin\phi'_i & \cos\phi'_i & 0 \\ L\sin\phi_i & L\cos\phi_i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_i \\ N_i \\ M_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\phi'_{i+1} & -\sin\phi'_{i+1} & 0 \\ \sin\phi'_{i+1} & \cos\phi'_{i+1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{i+1} \\ N_{i+1} \\ M_{i+1} \end{bmatrix}, \\
\hline
\text{꼬리 마디} & \begin{bmatrix} A_{n+2} \\ B_{n+2} \\ C_{n+2} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \cos\phi'_{n+2} & -\sin\phi'_{n+2} & 0 \\ \sin\phi'_{n+2} & \cos\phi'_{n+2} & 0 \\ L\sin\phi_{n+2} & L\cos\phi_{n+2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{n+2} \\ N_{n+2} \\ M_{n+2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\phi'_{n+3} & -\sin\phi'_{n+3} & 0 \\ \sin\phi'_{n+3} & \cos\phi'_{n+3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{k-n-1} \\ R_{k-n-1} \\ 0 \end{bmatrix}.
\end{array}
\tag{10}
$$

해석의 편의를 위하여 다음을 정의하자.

$$
H_i := \begin{bmatrix} \cos\phi'_i & -\sin\phi'_i & 0 \\ \sin\phi'_i & \cos\phi'_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad L_i := \begin{bmatrix} \cos\phi'_i & -\sin\phi'_i & 0 \\ \sin\phi'_i & \cos\phi'_i & 0 \\ L\sin\phi_i & L\cos\phi_i & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{단, } L_1 := H_2;
$$

$$
\overrightarrow{Q}_1 := \begin{bmatrix} -T_k \\ -R_k \\ -(L-v_1)R_k \end{bmatrix}; \quad \overrightarrow{Q}_i := \begin{bmatrix} F_i \\ N_i \\ M_i \end{bmatrix}, \ i = 2,3,\cdots,n+2; \quad \overrightarrow{Q}_{n+3} := \begin{bmatrix} T_{k-n-1} \\ R_{k-n-1} \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \overrightarrow{Z}_i := \begin{bmatrix} A_i \\ B_i \\ C_i \end{bmatrix}.
$$

이들을 이용하여, 운동 방정식을 다음 점화식과 같이 간단한 꼴로 나타낸다: $\overrightarrow{Z}_i = H_{i+1}\overrightarrow{Q}_{i+1} - L_i\overrightarrow{Q}_i$, $i = 1,2,\cdots,n+2$. 행렬 H_i가 가역행렬이므로, 이 식은

$$
\overrightarrow{Q}_{i+1} = H_{i+1}^{-1}\overrightarrow{Z}_i + S_i\overrightarrow{Q}_i, \qquad S_i := H_{i+1}^{-1}L_i \tag{11}
$$

로 표현된다. 특히, 이 점화 관계를 이용하여 $\overrightarrow{Q}_{n+3}$를 구해보면,

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{Q}_{n+3} &= H_{n+3}^{-1}\overrightarrow{Z}_{n+2} + S_{n+2}\left(H_{n+2}^{-1}\overrightarrow{Z}_{n+1} + S_{n+1}(\cdots)\right) \\
&= H_{n+3}^{-1}\overrightarrow{Z}_{n+2} + S_{n+2}H_{n+2}^{-1}\overrightarrow{Z}_{n+1} + \cdots + S_{n+2}S_{n+1}\cdots S_2H_2^{-1}\overrightarrow{Z}_1 + S_{n+2}S_{n+1}\cdots S_1\overrightarrow{Q}_1 \\
&= \overrightarrow{V}_{n+3} + S_{n+2}S_{n+1}\cdots S_1\overrightarrow{Q}_{1.}
\end{aligned}
\tag{12}
$$

단, $\overrightarrow{V}_{n+3} = H_{n+3}^{-1}\overrightarrow{Z}_{n+2} + S_{n+2}H_{n+2}^{-1}\overrightarrow{Z}_{n+1} + \cdots + S_{n+2}S_{n+1}\cdots S_2H_2^{-1}\overrightarrow{Z}_1$.

정리하자면, 상대적으로 복잡한 운동 방정식을 식 (12)와 같은 간단한 형태의 선형 방정식으로 표현하였다.

행렬 $S := S_{n+2}S_{n+1}\cdots S_1$는 다수의 행렬들의 곱이지만, 몇몇 계산을 거쳐 상대적으로 간단한 형태로 나타낼 수 있다. 이를 위하여, $\mathrm{Rot}(\phi_i)$를 반시계 방향으로 ϕ_i만큼 회전하는 회전 행렬, $\vec{l}_i := [L\sin\phi_i \quad L\cos\phi_i]^\top$로 정의하자. H_i와 L_i의 정의, 식 (11)의 S_i의 정의를 사용하면,

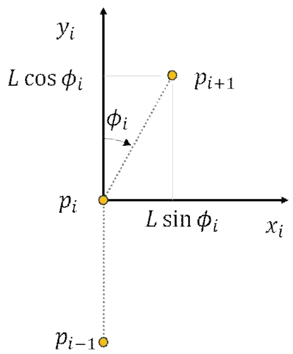
$$
S_i = \begin{bmatrix} \mathrm{Rot}(\phi_{i+1}') & \vec{0} \\ \vec{0}^\top & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathrm{Rot}(\phi_i') & \vec{0} \\ \vec{l}_i^\top & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{Rot}(\phi_i' - \phi_{i+1}') & \vec{0} \\ \vec{l}_i^\top & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{Rot}(\phi_i) & \vec{0} \\ \vec{l}_i^\top & 1 \end{bmatrix}. \tag{13}
$$

위 식의 마지막 등호에서 $\phi_i = \phi_i' - \phi_{i+1}'$인 성질이 사용되었다. 식 (13)을 이용하여 S_iS_{i-1}을 구해보면,

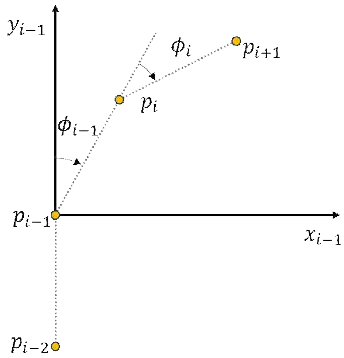
$$
S_iS_{i-1} = \begin{bmatrix} \mathrm{Rot}(\phi_i + \phi_{i-1}) & \vec{0} \\ \left(\mathrm{Rot}(-\phi_{i-1})\vec{l}_i + \vec{l}_{i-1}\right)^\top & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{Rot}(\phi_i + \phi_{i-1}) & \vec{0} \\ \vec{l}_i^\top & 1 \end{bmatrix}
$$

을 얻는다. 첫 번째 등호는 회전 행렬의 성질로 인하여, 두 번째 등호는 그림 14(b)로 인하여 성립한다. 그림 14(c)를 참고하여 반복적인 계산을 수행하면,

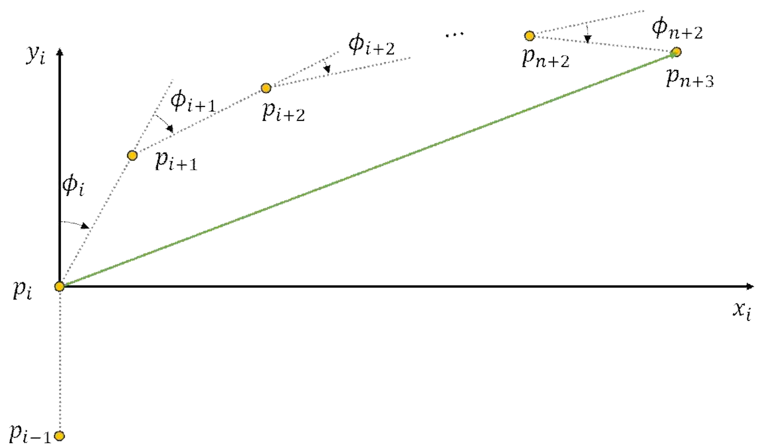
$$
S_{n+2}S_{n+1}\cdots S_i = \begin{bmatrix} \mathrm{Rot}(\phi_{n+2} + \phi_{n+1} + \cdots + \phi_i) & \vec{0} \\ \vec{l}_i{}'^\top & 1 \end{bmatrix}
$$



(a) $\vec{l}_i$ in x_i-y_i coordinate.



(b) $\mathrm{Rot}(-\phi_{i-1})\vec{l}_i + \vec{l}_{i-1}$ in x_{i-1}-y_{i-1} coordinate.



(c) Concatenation of the cases (a), (b), and so on.

Fig. 14 Geometric interpretation of $\vec{l}_i$, $\mathrm{Rot}(-\phi_{i-1})\vec{l}_i + \vec{l}_{i-1}$, and so on.

을 구할 수 있다. 여기서 $\vec{l}_i{}'$는 구동각 p_i에 대한 p_{n+3}의 상대 위치를 x_i-y_i 좌표계에서 기술한 벡터이다. 즉, $\vec{l}_i{}'$의 첫 번째 원소의 값은 $(p_{n+3}-p_i)\cdot\hat{n}_i$이며, 두 번째 원소의 값은 $(p_{n+3}-p_i)\cdot\hat{t}_i$이다. 이를 바탕으로 행렬 S를 구해보면,

$$S = S_{n+2}S_{n+1}\cdots S_1 = \begin{bmatrix} \cos(\phi'_2-\phi'_{n+3}) & -\sin(\phi'_2-\phi'_{n+3}) & 0 \\ \sin(\phi'_2-\phi'_{n+3}) & \cos(\phi'_2-\phi'_{n+3}) & 0 \\ (p_{n+3}-p_2)\cdot\hat{n}_2 & -(p_{n+3}-p_2)\cdot\hat{t}_2 & 1 \end{bmatrix}$$

을 결론적으로 얻는다.

이상을 통하여 $\vec{Q}_1$와 $\vec{Q}_{k-n-2}$을 구할 수 있다. 머리와 꼬리 마디의 DC 모터 조건인 $T_k = T_{k-n-1}$를 적용하면,

$$\begin{bmatrix} T_k \\ R_{k-n-1} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\phi'_2-\phi'_{n+3}) & -\sin(\phi'_2-\phi'_{n+3}) & 0 \\ \sin(\phi'_2-\phi'_{n+3}) & \cos(\phi'_2-\phi'_{n+3}) & 0 \\ (p_{n+3}-p_2)\cdot\hat{n}_2 & -(p_{n+3}-p_2)\cdot\hat{t}_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -T_k \\ -R_k \\ -(L-v_1)R_k \end{bmatrix} + \vec{V}_{n+3}$$

를 얻는다. 여기서 $\vec{V}_{n+3}$은 $\hat{t}_{n+3}$-$\hat{n}_{n+3}$ 좌표계에서 발생하는 힘과 돌림힘의 크기를 의미한다. 위 식을 정리하여, 마침내 다음 식을 얻는다.

$$\begin{bmatrix} 1+\cos(\phi'_2-\phi'_{n+3}) & -\sin(\phi'_2-\phi'_{n+3}) & 0 \\ \sin(\phi'_2-\phi'_{n+3}) & \cos(\phi'_2-\phi'_{n+3}) & 1 \\ (p_{n+3}-p_2)\cdot\hat{n}_2 & L-v_1-(p_{n+3}-p_2)\cdot\hat{t}_2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -T_k \\ -R_k \\ -R_{k-n-1}\end{bmatrix} = \overrightarrow{V}_{n+3}. \tag{14}$$

2.3.4-c) 몸통 마디의 개수와 최대 구동각의 관계

방정식 (14)가 유일한 해를 가질 필요 충분 조건은 다음과 같다.

$$Z := \det\begin{bmatrix} 1+\cos(\phi'_2-\phi'_{n+3}) & -\sin(\phi'_2-\phi'_{n+3}) & 0 \\ \sin(\phi'_2-\phi'_{n+3}) & \cos(\phi'_2-\phi'_{n+3}) & 1 \\ (p_{n+3}-p_2)\cdot\hat{n}_2 & L-v_1-(p_{n+3}-p_2)\cdot\hat{t}_2 & 0 \end{bmatrix} \neq 0.$$

위 행렬의 (2,3) 성분에 대하여 Laplace expansion을 사용하면,

$$\begin{aligned} 0 \neq Z &= \det\begin{bmatrix} 1+\cos(\phi'_2-\phi'_{n+3}) & -\sin(\phi'_2-\phi'_{n+3}) \\ (p_{n+3}-p_2)\cdot\hat{n}_2 & L-v_1-(p_{n+3}-p_2)\cdot\hat{t}_2 \end{bmatrix} \\ &= \det\begin{bmatrix} 1+\cos(\phi'_2-\phi'_{n+3}) & (p_{n+3}-p_2)\cdot\hat{n}_2 \\ -\sin(\phi'_2-\phi'_{n+3}) & L-v_1-(p_{n+3}-p_2)\cdot\hat{t}_2 \end{bmatrix} =: \det[f_1 \quad f_2] \end{aligned}$$

이 된다. 이로부터 f_1과 f_2는 서로 평행하지 않아야 함을 알 수 있다. 참고로, $\hat{t}$과 $\hat{n}$은 서로 수직이고 $q_k=(L-v_1)\hat{t}_2+p_2$이므로, f_2는

$$f_2 = \begin{bmatrix} \{-(L-v_1)\hat{t}_2+p_{n+3}-p_2\}\cdot\hat{n}_2 \\ \{(L-v_1)\hat{t}_2+p_2-p_{n+3}\}\cdot\hat{t}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(q_k-p_{n+3})\cdot\hat{n}_2 \\ (q_k-p_{n+3})\cdot\hat{t}_2 \end{bmatrix}$$

으로 표현된다. q_k-p_{n+3}가 $\hat{t}_{n+3}$-$\hat{n}_{n+3}$ 좌표계의 한 벡터임을 감안하여, $q_k-p_{n+3}=R\cos(\alpha)\hat{t}_{n+3}+R\sin(\alpha)\hat{n}_{n+3}$로 놓자. 그러면 $\hat{t}_{n+3}=\cos(\phi'_2-\phi'_{n+3})\hat{t}_2-\sin(\phi'_2-\phi'_{n+3})\hat{n}_2$와 $\hat{n}_{n+3}=\sin(\phi'_2-\phi'_{n+3})\hat{t}_2+\cos(\phi'_2-\phi'_{n+3})\hat{n}_2$인 관계로 인하여, $f_2=R[\sin(\alpha+\phi) \quad \cos(\alpha-\phi)]^\top$이다. 여기서 $\phi:=\phi'_2-\phi'_{n+3}$이다. 따라서 f_1과 f_2가 평행하지 않아야 하므로, $\det[f_1 \quad f_2]\neq 0$, 즉, $-\sin(\alpha+\phi)\sin\phi-\cos(\alpha-\phi)(1+\cos\phi)\neq 0$이 성립해야 한다. 이를 정리하면, $\cos(\alpha-\phi)+\cos(\alpha-2\phi)\neq 0$ 그리고 $\cos(\alpha-\phi)=-\cos(\alpha-2\phi)=\cos\{(2z+1)\pi\pm(\alpha-2\phi)\}$, $z\in\mathbb{Z}$를 얻는다. 즉,

$$\alpha-\phi\pm(\alpha-2\phi)=(2z+1)\pi,\ z\in\mathbb{Z} \tag{15}$$

가 성립할 때는 운동 방정식의 해를 구할 수 없다.

식 (15)를 부호에 따라 다시 써보면,

$$\phi = \begin{cases} (2z+1)\pi & \text{(16-a)} \\ \dfrac{2}{3}\alpha+\dfrac{(2z+1)\pi}{3} & \text{(16-b)} \end{cases}$$

와 같고 이것이 만족되면 해가 존재하지 않는다. 식 (16)은 구동각의 범위를 제한하는 식으로, (16-a)로부터 $-\pi<\phi=\phi'_2-\phi'_{n+3}<\pi$여야 함을 알 수 있다. 이는 각 서보 모터가 한 방향으로 최대 구동각을 취할 때, 그림 15에서처럼 $\phi=\phi'_2-\phi'_{n+3}=\pi$가 되면 안된다. 이러한 구동은 피해야 하며, 이 조건은 $\alpha<\pi/2$인 조건으로 귀결된다.

식 (16-b)가 의미하는 바를 파악하기 위하여, 편의상 $\alpha\geq 0$, $0<\phi<\pi$인 경우를 다루자.(반대 경우는 부호만 바꾸면 되기 때문에 생략한다.) 그러면 (16-a)의 조건으로 인하여 $0\leq\alpha<\pi/2$이어야 한다. 이 조건과 (16-b)로부터 도출되는 식 $\left(z+\frac{1}{2}\right)\pi=\frac{3}{2}\phi-\alpha$를 이용하면, 부등식 $-1<z<1$을 얻는다. 즉, z는 정수이므로 $z=0$의 값 밖에 가질 수 있다. 따라서 종합하면, 운동 방정식의 해의 존재성을 보장하기 위하여, $\phi\neq\frac{2}{3}\alpha+\frac{\pi}{3}$(또는 $\phi-\frac{\pi}{3}\neq\frac{2}{3}\alpha$)와 $0\leq\alpha<\frac{\pi}{2}$인 상황만 고려하면 된다. 모든 구동점에서 최대 구동

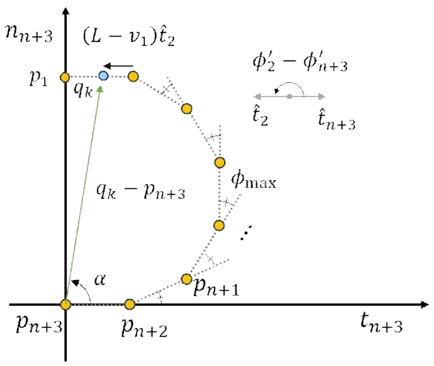


Fig. 15 Maximum curvature condition.

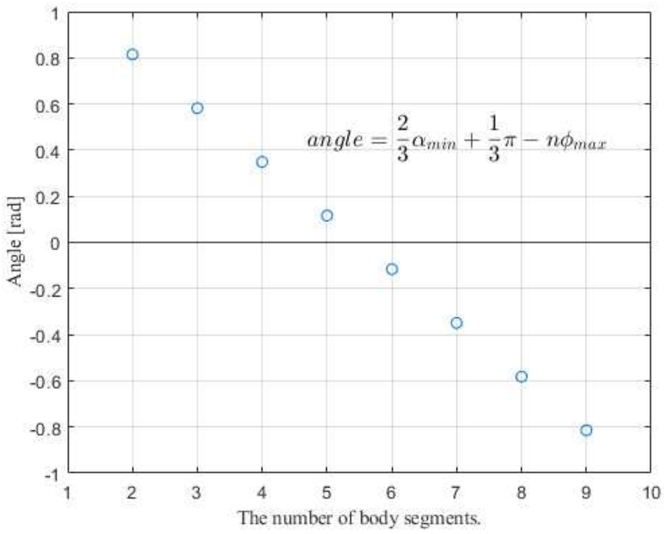


Fig. 16 Determination angle change with respect to the number of body segment

각 $\phi_{\max}$인 상태의 로봇의 자세와 임의의 ϕ, α에 대하여 $\phi - \frac{\pi}{3} \neq \frac{2}{3}\alpha$가 되도록 하는 범위는 $n\phi_{\max} - \frac{\pi}{3}\pi < \frac{2}{3}\alpha_{\min}$과 같다. 따라서 그림 15를 참고하여, $\alpha_{\min}$을 계산해보면 다음과 같다.

$$\alpha_{\min} = \arg(L + Le^{\phi_{\max} i} + \cdots + Le^{n\phi_{\max} i}) = \arg\left(\frac{1 - e^{(n+1)\phi_{\max} i}}{1 - e^{\phi_{\max} i}}\right), \quad \phi_{\max} \neq 2z\pi,\ z \in \mathbb{Z}. \tag{17}$$

그림 16은 판별각 $\frac{2}{3}\alpha_{\min} + \frac{\pi}{3} - n\phi_{\max}$의 값을 n에 대하여 나타낸 그래프이다. 해당 그래프는 $\phi_{\max} = \pi/9$일 때 (17)로부터 $\alpha_{\min}$을 계산하여 그렸다. 마디가 5개와 6 사이에서 0°를 교차하여 지나간다. 따라서 영점이 생기지 않도록 몸통 마디의 개수 n이

$$n \leq 5 \tag{18}$$

여야 한다.

3. 결과 및 토의

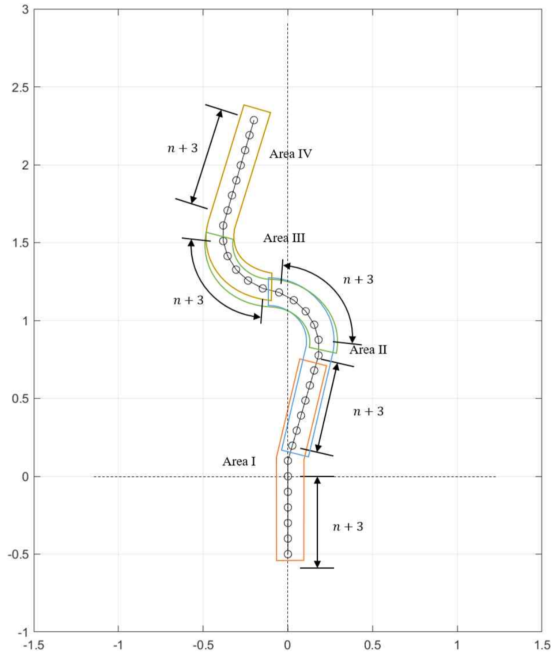
3.1. 모의실험

본 연구에서는 변위 조건의 연속성을 검증하는 동시에 액추에이터에 가해지는 힘 및 돌림힘의 크기를 파악하기 위하여 수치 해석을 응용한 시뮬레이션을 수행하였다. 시뮬레이션 도구로는 Mathworks 사의 MATLAB을 활용하였다.

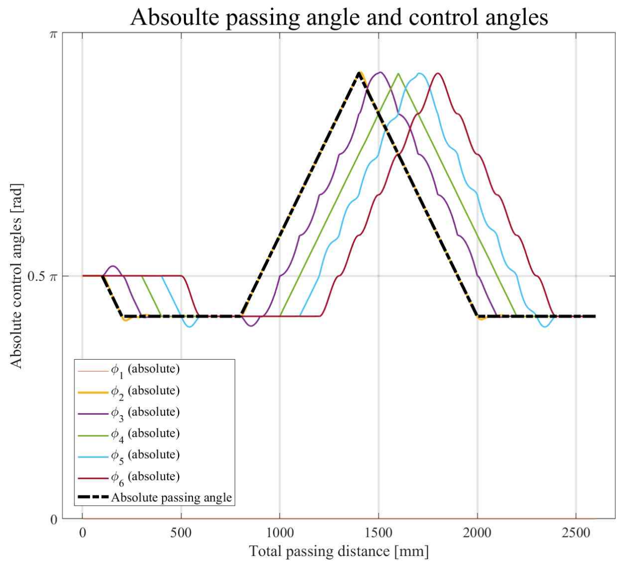
3.1.1. 변위 연속성 검증 시뮬레이션

2.3.에서 제시한 구동점의 변위에 대한 조건이 실제로 구동점의 좌표와 구동각의 연속성을 보장하는지 확인한다. 임의의 각도에 대한 확인이 어렵다는 점을 감안하여, 실제로 로봇이 주행할 것으로 예상되는 적당한 형태의 경로를 모아 검증용 경로로 사용하였다[4]. 그림 17은 검증용 주행 경로를 나타낸 것이다.

4) 해당 경로는 힘 및 돌림힘 검증 시뮬레이션에서도 활용하였다.



(a) Test course



(b) Absolute passing angle and control angles according to its total passing distance.

Fig. 17 Test course and graph of absolute control angles. Note that kinematic conditions ensure continuity of displacement.

검증용 주행 경로는 총 4개의 영역으로 구분된다. Area I(주황색 영역)은 로봇이 하나의 굴곡만을 지날 때의 물리량을 분석하기 위한 경로이며, Area II(파란색 영역)은 로봇이 직선 주행 중 최대 곡률 주행 곡선으로 진입하는 과정을 분석하기 위한 경로이다. Area III는 주행 방향이 크게 바뀌었을 때의 물리량을 분석하기 위한 영역이며, 마지막으로 Area IV는 곡선 주행 중 직선 주행 경로로 진입할 때의 물리량을 분석하기 위한 영역이다.

실험의 일관성을 확보하기 위하여 다음의 순서로 실험을 진행하였다.

1. 머리 마디의 번호 k를 $n+3$으로 지정한다.
2. v_1의 크기를 1[mm]로 지정한다.
3. v_1의 크기에 따라 머리 조향각 γ_k를 계산한다.
4. $v_{1,}\ \gamma_k$의 값을 토대로 로봇의 몸통 마디의 행정 거리 $v_{2,}\ \cdots, v_{n+1}$를 계산한다.
5. v_{n+1}의 값을 토대로 꼬리 조향각 $\gamma_k{}'$를 계산한다.
6. 로봇의 모든 제어 마디의 변위와 구동각의 크기를 기록한다.
7. $v_1 = 2 \sim L$에 대하여 2~6번의 과정을 반복한다.
8. $k = n+4 \sim m-1$ 에 대하여 1~7번의 과정을 반복한다.

그림 17은 $n=3$, $L=100[\mathrm{mm}]$에 대한 실험 수행 결과를 그래프로 나타낸 것이다(편의상 $Lk+v_1$의 값을 총 행정 거리라는 용어로 표현하였다). 그래프에서 확인할 수 있듯이, 각 구동점의 구동각은 변위에 대하여 연속성을 보이고 있음을 확인할 수 있다.

3.1.2. 힘 및 돌림힘 측정 시뮬레이션

이 절에서는 2.4.의 수식을 기반으로 각속도, 각가속도 및 액추에이터(서보 모터와 DC 모터)의 출력의 크기를 계산한다. 다만 해당 시뮬레이션의 수행은 아래와 같은 여러 요인들에 의하여 설계하기가 다소 까다롭다.

1. 속도 및 가속도 계산의 어려움
   2.3절에서 확인한 바와 같이, 행정 거리와 절대 구동각의 계산에는 수많은 변수들이 개입한다. 이 변수들이 서로 유기적으로 영향을 미치기 때문에 해석적으로 각 변수의 미분 계수와 이차 미분 계수를 구하는 작업이 매우 복잡해진다. 또한, 계산의 양과 메모리 소모량이 크게 증가하는 문제도 동반된다.
2. 변인 통제의 어려움
   로봇의 속도와 가속도를 지정하는 변수로는 앞서 이야기한 것과 같이 1번 구동점의 행정 거리, 행정 속도, 행정 가속도를 지정하는 방식을 사용한다. 일반적인 방식을 적용하는 경우 1번 구동점의 총 행정 거리가 등가속도 직선 운동의 수식에 따라 결정되어야 하며, 따라서 구동점의 변위가 매번 새로 계산되어야 한다. 이에 따라 통제 변인인 총 행정 거리의 값이 각 시뮬레이션마다 다르게 주어지므로 실험값의 취급이 곤란해진다.
3. 지나치게 많은 연산
   앞서 제시된 두 경우 모두 매우 많은 연산을 요구하며, 시뮬레이션의 수행에 지나치게 오랜 시간이 소요된다. 따라서 시뮬레이션 자체의 문제를 검증하고 해석하는 데에 많은 시간과 비용이 소모될 우려가 있다.

본 보고서에서는 수치 해석 방식을 도입하여 속도와 가속도의 계산에 소요되는 시간과 연산의 양을 크게 감경하였다. 또한, 변인 통제의 어려움을 해소하기 위하여 국소적인 수치 미분 방식을 고안하여 주어진 통제 변인인 1번 행정 거리, 행정 속도, 행정 가속도에 대한 모든 구동점의 속도, 가속도, 각속도, 각가속도를 계산하였다[5]. 이 방식을 사용하면 변위 조건의 재계산이 전혀 필요 없기 때문에 3.1.1절에서 계산한 변위 조건을 재활용하는 방식으로 연산 총량을 크게 줄일 수 있다.

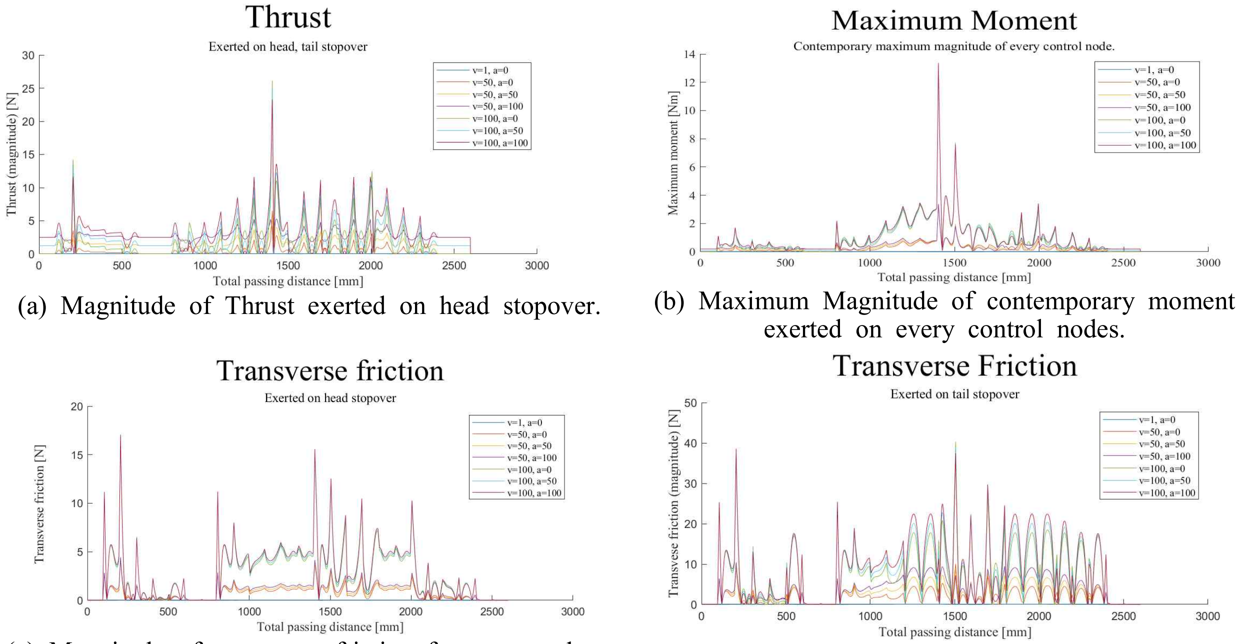
구체적인 실험 방법은 다음과 같다:

1. 로봇의 몸통 마디의 개수 n의 값을 3으로 설정한다.
2. 로봇의 1번 제어 노드의 물리량 분석용 주행 경로상에서의 위치를 $1[\mathrm{mm}]$씩 이동시키며 각 상황에서 모든 제어 노드의 변위를 계산하여 기록한다.
3. 1번 마디가 국소적으로 $v = 0.001[\mathrm{m/s}]$의 선속력으로 이동한다고 가정하여 2번의 모든 변위에서 각 제어 노드의 속도, 구동각의 각속도를 계산하여 기록한다.
4. 1번 마디가 국소적으로 $a = 0.001[\mathrm{m/s^2}]$의 선 가속력으로 이동한다고 가정하여 2번의 모든 변위에서 각 제어 노드의 가속도, 구동각의 각가속도를 계산하여 기록한다.
5. 4에서 구한 가속도, 각가속도를 활용하여 운동 방정식을 풀이하여, 각 제어 노드에서 발생하는 힘과 돌림힘의 크기를 모두 기록한다.
6. $a = 0.002, 0.003, \cdots, 0.100[\mathrm{m/s^2}]$에 대하여 4~5번을 반복한다.
7. $v = 0, 0.002, \cdots, 0.1000[\mathrm{m/s}]$에 대하여 3~6번을 반복한다.
8. $n = 3, 4, 5, 6$에 대하여 2~7을 반복한다.

계산은 2.3절의 수식을 참조하며, 일반성을 위하여 각 마디의 질량은 $1[\mathrm{kg}]$으로, 관성 모멘트는 $0.001[\mathrm{kgm^2}]$ 가정한다. 또한, DC 모터에 의한 추력은 머리 마디와 꼬리 마디에서 동일하다고 가정한다. 실험 결과, 머리 마디의 행정 거리가 L을 만족하는 순간을 전후로 가속도가 무한하게 발산하는 현상이 확인 되었다. 이는 각 제어 노드의 속도가 불연속적으로 변화하기 때문에 발생하는 현상이다. 실제 로봇의 구동에 있어서는 액추에이터 구동의 연속성에 의해 이러한 극단적인 출력이 불가능하다고 판단하여 해당 점에서의 물리량은 고려 대상에서 제외하였다.

먼저, 일반적인 시각을 얻기 위해 $n = 3$인 경우의 실험 결과를 살펴본다. 다음에 주어진 그림 18은 실

5) 부록 2 참조.



(a) Magnitude of Thrust exerted on head stopover.

(b) Maximum Magnitude of contemporary moment exerted on every control nodes.

(c) Magnitude of transverse friction force exerted on head stopover.

(d) Magnitude of transverse friction force exerted on tail stopover.

Fig. 18 Physical quantities according to total passing distance

힘 결과 수집한 물리량의 절댓값에서 무한대로 발산하는 점들을 제외한 결과를 나타낸 그래프이다. 범주에 기록된 수치는 각각 1번 제어 노드의 행정 속도와 행정 가속도(각각 행정 거리의 일차 미분치와 이차 미분치)로, 단위는 각각 $[mm/s],[mm/s^2]$과 같다.

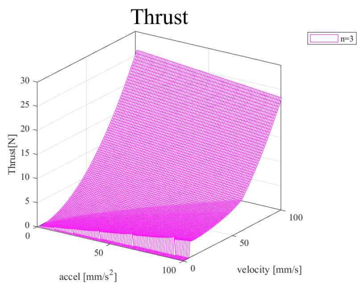
그림 18의 전반적인 특성을 확인했을 때, 힘 혹은 물리량의 크기가 가속도 보다는 속도에 크게 의존하는 것을 확인할 수 있다. 또한 1번 제어 노드의 총 행정 거리가 L의 배수가 되는 점에서 액추에이터의 출력이 크게 증가하는 것을 확인할 수 있다. 이는 앞서 기술한 것과 같은 이유이다. 다른 한편으로는, 이 극대값이 분포하는 양상을 확인할 수 있다. 주목해야 할 곳은 총 행정 거리 $s = 100, 1600[mm]$ 부근이다. 각각 Area I, Area III에서 주요하게 다루었던 구간에 해당한다.

$s = 100[mm]$지점에서는 추력이 크게 증가하는 것을 확인할 수 있으며, $s = 1600[mm]$지점에서는 추력과 돌림힘 모두 아주 크게 증가하는 것을 확인할 수 있다. 따라서 곡률이 크게 바뀌는 지점에서 차체에 무리가 가해진다는 것을 알 수 있다. 머리, 꼬리의 경유점에서는 두 지점에서 모두 유사한 특성이 드러난다.

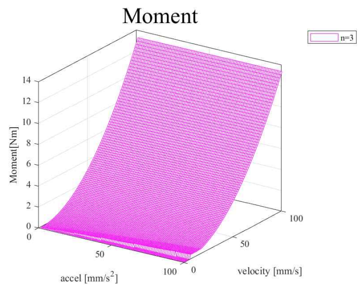
다음으로는 $n = 3$일 때 각 물리량의 최대치만을 나타낸 그래프를 확인한다. 그림 19은 머리 마디의 행정 속도와 행정 가속도를 일정하게 지정하여 시험용 경로를 주행했을 때 나타난 추력과 서보 모터 돌림힘의 최대 크기를 3차원 그래프 형식으로 나타낸 것이다. 앞선 분석에서와 마찬가지로, 추력과 모멘트의 크기가 가속도 보다는 속도에 크게 의존하는 양상을 보임을 확인할 수 있다. 한편 아래의 그림은 머리 경유점과 꼬리 경유점에서 발생하는 정지 마찰력의 크기를 나타낸 그래프이다. 마찬가지로 속도 및 가속도에 의존하는 경향성은 추력, 모멘트와 동일하지만, 곡면상의 꺾인 선의 형상이 앞선 두 그래프에 비해 두드러진다. 이는 Area I과 Area III에서의 극값이 서로 경쟁한 결과로 해석할 수 있다.

다음으로는 n의 개수에 따른 변화를 확인하도록 한다. 그림 20은 n의 개수에 따른 추력과 돌림힘, 머리 경유점 및 꼬리 경유점에서 발생하는 수직 방향 마찰력의 최대 크기를 대수 눈금으로 나타낸 것이다.

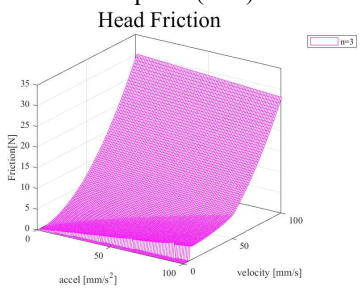
n의 값이 커짐에 따라서 물리량의 범위가 매우 크게 변하는 것을 확인할 수 있다. 이러한 거동은 일반적인 상황에서 매우 부적절할 뿐더러 로봇의 원활한 동작에도 문제를 일으킬 수 있다. 그림 21는 n=5



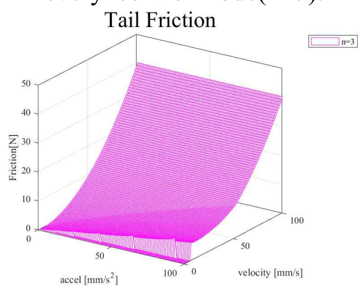
(a) Maximum magnitude of thrust exerted on head stopover(n=3).



(b) Maximum magnitude of moment exerted on every control node(n=3).

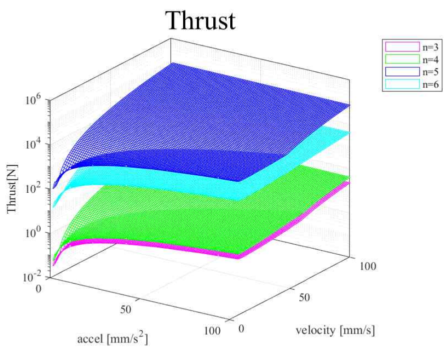


(c) Maximum magnitude of transverse friction exerted on head stopover(n=3).

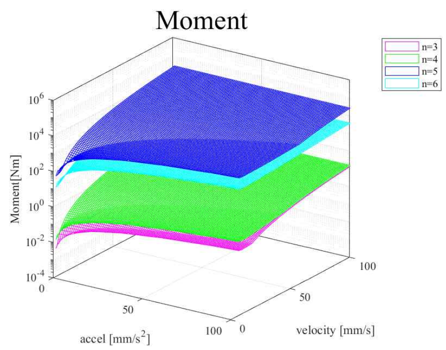


(d) Maximum magnitude of transverse friction exerted on tail stopover(n=3).

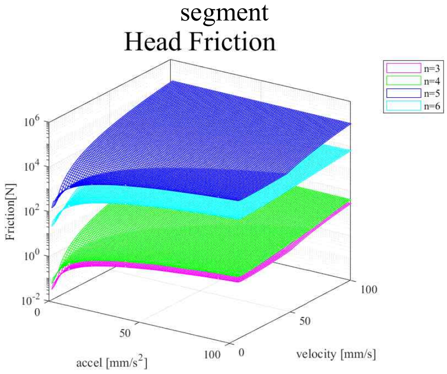
Fig. 19 Maximum value of physical quantities when n=3.



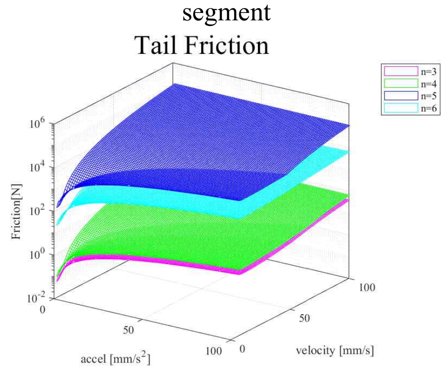
(a) Maximum thrust magnitude at given passing velocity, acceleration, and the number of body segment



(b) Maximum moment magnitude at given passing velocity, acceleration, and the number of body segment

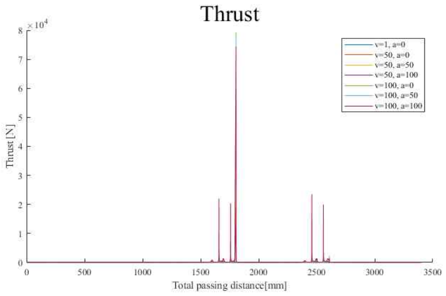


(c) Maximum head friction magnitude at given passing velocity, acceleration, and the number of body segment

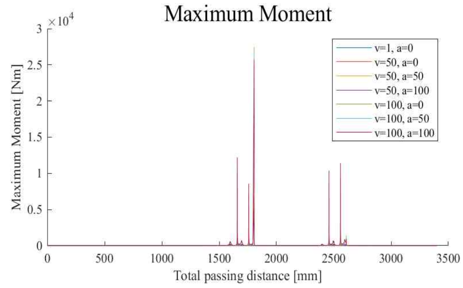


(d) Maximum tail friction magnitude at given passing velocity, acceleration, and the number of body segment

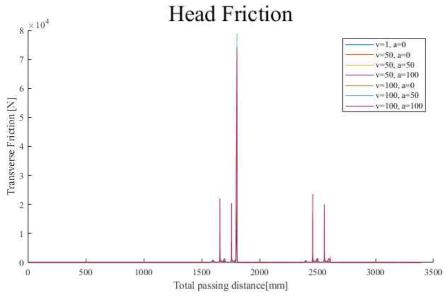
Fig. 20 Maximum value of physical quantities according to the number of body segments n (n = 3,4,5,6)



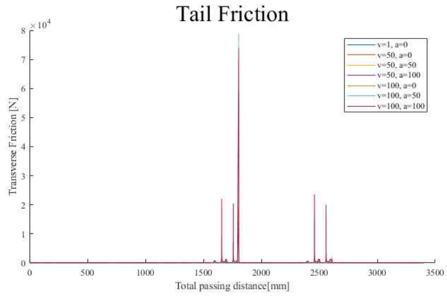
(a) Thrust graph when n=5.



(b) Maximum moment graph when n=5.



(c) Head(transverse) friction graph when n=5.



(d) Tail(transverse) friction graph when n=5.

Fig. 21 Singular points in physical quantities when n=5.

일 때의 로봇 구동에 필요한 힘, 돌림힘 등을 총 행정거리에 대하여 나타낸 것이다. 그림 22의 개형을 통해 그림 20에서 제시된 비정상적으로 큰 물리량은 특정한 변위에서만 일시적으로 발생하는 물리량에 의한 것임을 알 수 있다.[6]

3.2. ADCR의 실물 제작

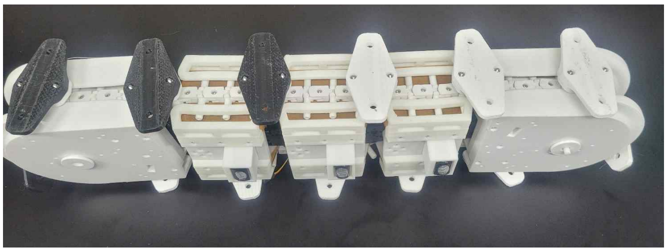
3.2.1. 하드웨어 설계

본 설계에서는 본문에서 제시한 내용을 토대로 ADCR의 모델을 제작하였다. 구동점을 구성하는 요소로는 제어가 간편한 서보 모터 MG 996R을 선택하여 배치하였다(그림 25-(c) 참조). 서보 모터에 가해지는 부담을 줄이기 위하여 가능한 한 몸통 마디의 길이 L을 $10[\mathrm{cm}]$로 짧게 선택하였다. 접지 체인 사이의 거리 또한 L과 같음에 유의한다. 한편 접지 체인 사이의 체인 배치 개수 N은 4로 정하였으며, 이에 따라 체인 길이 d의 값은 $2.5[\mathrm{cm}]$로 결정되었다. 따라서 $L=4d$이며, 이러한 관계는 그림 25-(a)에서 잘 드러난다.

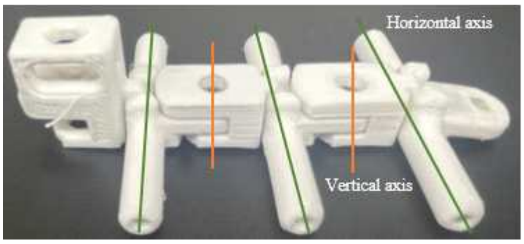
로봇의 원활한 구동을 위해서는 체인의 원활한 행정이 매우 중요하다. 본 설계에서 언급하는 체인은 일반적인 용도의 체인과는 달리 두 개의 기계적인 기능을 갖는다. 첫 번째 기능은 스프로킷을 통한 동력 전달이다. 이를 위한 회전축을 수평축이라고 하자. 두 번째 기능은 접지 패드의 자유 회전을 보장하는 것이다. 이를 위한 축을 연직축이라고 하자. 이 두 기능을 동시에 적절하게 구현하기 위해서는 각 회전축을 세심하게 배치해야 한다(그림 25-(b) 참조).

본 설계에서는 각 회전이 일어나는 장소를 공간적으로 분리하였다. 머리 마디와 꼬리 마디에서는 수평축에 의한 회전이 원활하게 일어날 수 있도록 가이드를 설치하여 연직축에 의한 회전을 제한하였으며, 체인 통로에서는 통로의 높이를 조절하여 수평축에 의한 회전을 제한하였다. 특히 머리 및 꼬리 마디에서는 체인의 횡방향 움직임이 완전히 제한된다(이러한 특징은 거꾸로 구동 방식에 영향을 주었다. 2.3.1절의 정의 4를 참조한다).

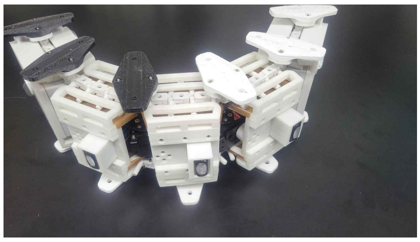
6) 아쉽게도 본 설계에서는 $n=5$에서 특이점들이 존재하는 이유를 밝혀내지 못했다.



(a) Overview of ADCR. Note that chain length equal to the length of body segment.

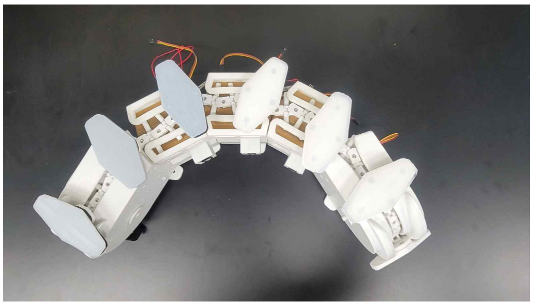


(b) Chain assembled. Two axes are placed in different direction.



(c) Servo motors connect body segments.

(d) Pads on head segment. Note that pads are unable to move laterally.



(e) Chains passing segments tortuously.

Fig. 22 An actual model of ACDR.

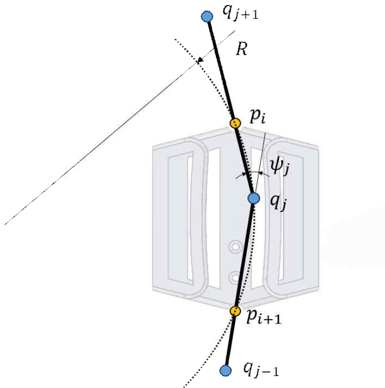


Fig. 23 Trace of stopover at Chain path

Table 2 Mechanical data of ACDR.

Height [m]	0.175
Length [m]	0.68
Width [m]	0.12
Maximum curvature [m^{-1}]	2.62

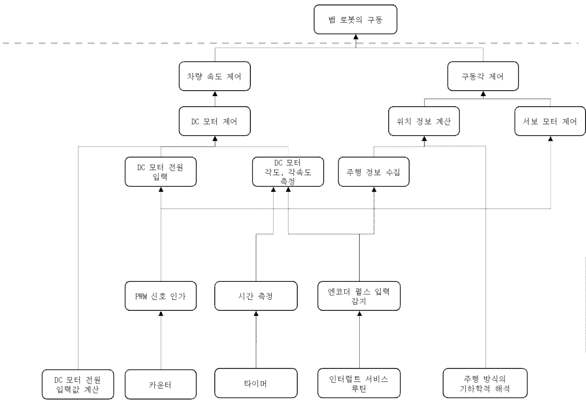


Fig. 24 Object tree for robot program.

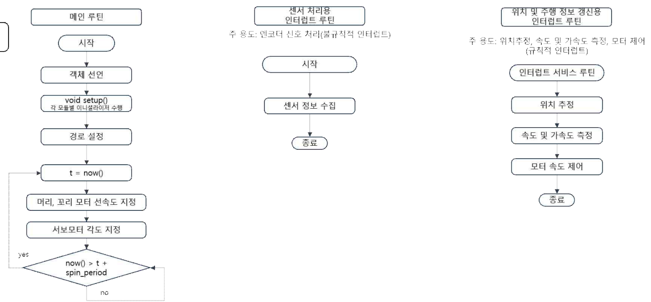


Fig. 25 Basic structure of robot control program.

반면, 몸통 마디에서의 체인의 구동은 머리 혹은 꼬리 마디에서의 구동과는 달리 일정 수준의 횡방향 구동이 가능하다는 특징을 갖는다(그림 25-(e)). 이는 몸체 마디에 부착된 체인 통로가 체인 자체보다 넓은 폭을 갖기 때문에 가능하다. 그림 23은 접지 체인 q_j와 연결된 두 접지 체인 q_{j-1}, q_{j+1}이 보이는 몸통 마디에 대한 상대 운동을 나타낸 것이다. 접지 조건에 의하여 체인의 경유각은 상대 운동이 이뤄지는 동안 상수로 유지됨을 고려하자. q_j의 궤적은 원호임을 알 수 있다. 본 연구에서는 체인

벽면의 형상을 이 궤적과 동일하게 설계하여 체인의 원활한 행정을 보장하였다. 체인의 원활한 행정을 위해 고려해야할 또 다른 요소로 경유각의 각도를 생각할 수 있다. 지나치게 큰 경유각은 로봇의 주행에 악영향을 미칠 수 있다. 본 설계에서는 최대 경유각 $\psi_{\max}$의 값을 15°로 지정하였다.

최대 경유각의 크기가 지정됨에 따라 구동각의 최대 크기 또한 결정된다. 이는 로봇의 조향 방식에 의한다. 3.1.1에서의 시뮬레이션에 의하면 최대 조향각은 $0.3267 \approx \pi/9$와 같이 주어지며, 이에 따라 식 (18)을 만족하는 범위에서 제어의 용이성을 위하여 $n=3$을 선택하였다.

이상에서 하드웨어의 설계를 마친다. 위의 표 2는 로봇의 제원을 간략히 나타낸 것이다.

3.2.2. 구동 프로그램 설계

Object Tree를 활용하여 시스템에 필요한 기능의 목록을 추출하였다.[7] 이상의 목록에서 확인할 수 있듯이, 로봇의 구동에는 복잡한 연산과 디지털 센싱 및 아날로그 출력이 필요함을 확인할 수 있었고, 마이크로 프로세서를 활용한 제어가 구동 수단으로 적합하다는 결론을 내렸다. PWM 신호 출력과 외부 인터럽트 활용의 용이성, 디버깅의 용이성을 고려하여 Atmel 사의 Atmega 2560(아두이노 메가)를 활용하여 프로그램을 구성하기로 하였다.

이상에서 제시한 기능의 목록을 유기적으로 구성하기 위하여 그림 25과 같은 프로그램의 형태를 제시한다. 이 프로그램은 하나의 메인 루틴과 두 개의 인터럽트 루틴으로 구성된다. 각 인터럽트 루틴을 차례대로 센서 처리용 인터럽트 루틴과 위치 정보 갱신용 인터럽트 루틴이라고 칭하자.

센서 처리용 인터럽트 루틴에서는 센서로부터 비동기적으로 받아들인 신호를 기록하는 역할을 한다. 위 프로그램에서는 비동기 센서의 실례로 로터리 엔코더를 제안하며, 인터럽트 루틴의 특성상, 필요한

7) 기대 효과는 이미 앞에서 다룬 바 있기 때문에 생략하였다.

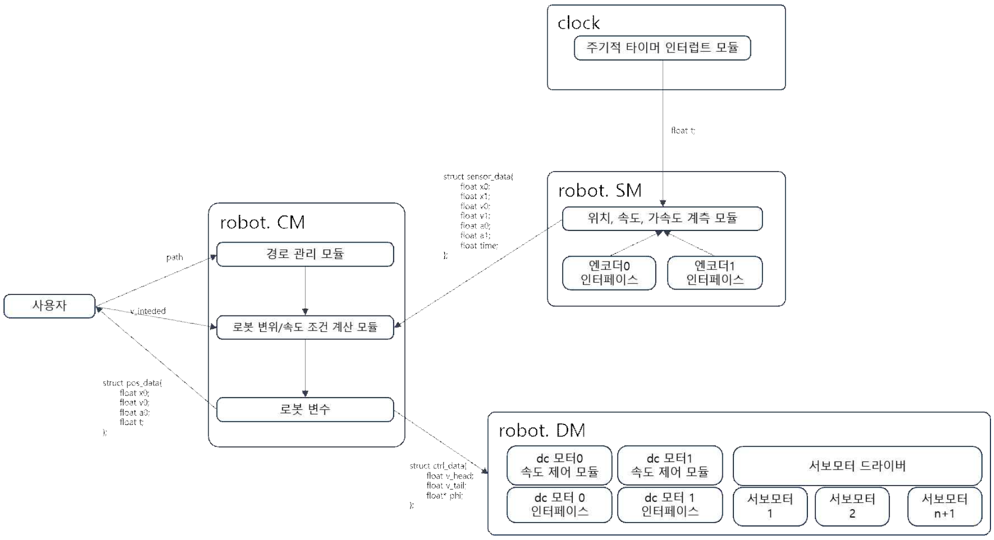


Fig. 26 Entire structure of instances.

경우 그 밖의 비동기 센서(위험 감지 센서, 장애물 탐지 센서 등)의 신호를 받아들이는 것 또한 가능하다. 위치 정보 및 주행 정보 갱신용 인터럽트 루틴은 주기적으로 동작하는 루틴으로, 누적된 센서 신호의 처리와 액추에이터의 제어가 이루어진다. 본 설계에서는 그 주기로 100[ms]를 설정하였으며, 이는

하나의 신호 수신에 20[ms]가 소요되는 서보 모터의 용이한 제어를 위한 것이다. 메인 루틴에서는 사용자가 직접 로봇의 속도와 경로를 지정할 수 있도록 하였다.

그림 26은 그림 25의 흐름도를 기반으로 추출한 로봇 구동용 프로그램에 필요한 객체와, 각 객체 및 사용자가 주고받는 정보를 나타낸 것이다. SM, CM, DM은 각각 센서 모듈, 제어 모듈, 구동 모듈을 나타낸다.

3.3 ADCR의 효용성

3.3.1. 특징과 의의

본 설계에서 제시한 뱀 로봇은 기존의 뱀 로봇들과 달리, 이산적으로 분포한 접지용 패드를 활용하여 접지 조건을 만족하면서 주행할 수 있다. 경유점의 접지 조건을 만족하기 위하여 차체의 각도를 서보모터로 제어하며, 머리와 꼬리 마디에 설치된 DC 모터를 통해 속도를 제어한다. 새로운 제어 방식에서는 접지 조건을 통해 비교적 간단한 센서 시스템과 적은 연산을 통해서도 높은 정확도로 로봇의 위치를 추정할 수 있다.

3.3.2. 경제성

본 설계는 새로운 방식의 하드웨어를 개발하고, 그 제어 방식을 개발하는 것을 목표로 한다. 때문에 프로젝트 진행에 있어서 시연용 모델의 제작 예산 및 연구 예산은 우선적으로 고려하였으나, 생산성의 향상에 관해서는 큰 비중을 두지 않았다. 때문에 다소 복잡하고 가공이 어려운 형상의 하드웨어를 설계하였고, 3d 프린터를 통한 제작에 크게 의존하였다. 표 3은 소모한 재료의 목록과 3d 프린터의 필라멘트의 양과 가격을 나타낸 표이다(나사, 볼트 등의 체결 요소는 제외하였다).

추가적인 연구와 설계 최적화를 거치면 시연용 모델에 비하여 생산 단가를 크게 낮출 수 있다. 차체의 제작은 철제 브라켓과 사출 금형을 활용하는 것으로 저렴하게 생산 가능하며, 프로세서 또한 저렴하게 구매할 수 있다.

Table 3 Bill of materials.

번호	품목	용도	개수	총액[원]
1	3d 프린터 필라멘트(1kg)	몸통 구성 요소	5	64500
2	스틸 봉 세트(체인 축)	체인 축	2	6500
3	테플론 테이프	체인 통로 윤활	1	9500
4	소형 브레드보드	제어 회로 구성	6	11610
5	DC 모터	동력 발생 장치	2	75900
6	서보 모터	몸통 각도 제어	4	52000
7	서보모터용 ㄷ자형 브라켓	서보모터 고정	5	21250
8	서보모터용 L자형 브라켓	서보모터 고정	5	15650
9	플랜지 커플링 6.35파이	구동 기어 고정	5	19250
10	아두이노 메가	제어용 프로세서	1	63300
11	리튬 폴리머(2S)	서보모터용 배터리	3	126000
12	리튬 폴리머(3S)	DC 모터 배터리	4	76000
13	실리콘	접지패드 마찰력 증진	1	77000
14	실리콘 접착제	접지패드 마찰력 증진	1	59400
총합				677860

3.3.3. 활용 방안 및 기대 효과

우선적으로, 뱀 로봇의 한계점으로 지적되었던 영상 처리에 대한 지나친 의존도를 해소할 수 있다. 접지 조건의 충족으로 인해 가능한 높은 정확도의 주행 정보는 영상 정보를 활용할 수 없는 상황에서도 위치 추정을 가능케 한다. 필요한 연산의 양도 적기 때문에 영상 처리를 통한 위치 추정과의 병용에도 무리가 없으며, 이를 통해 뱀 로봇의 자율 주행 성능을 큰 폭으로 향상할 수 있다.

특히 탐색 및 구조 로봇으로서 뱀 로봇의 활용도를 큰 폭으로 넓힐 수 있다. 본 설계에서 제안한 뱀 로봇은 무한 궤도의 특성과 뱀 로봇의 장점을 모두 보유하고 있다. 즉, 4륜 구동형 로봇에 비하여 비교적 험준한 지형에서도 주행이 가능하며, 협소한 지형으로의 진입 또한 가능하다. 더불어 정밀한 위치 추정이 가능해지기 때문에, 사람이 진입할 수 없는 환경에 진입하여 지형 정보를 취득하는 것은 물론, 사람의 조종 없이 자율적으로 재난 지역을 탐색하여 생존자의 위치를 기록하는 등의 작업 등을 기대할 수 있다.

4. 결 론

본 연구에서는 뱀 로봇의 위치 추정의 정확도를 높이기 위하여 접지 조건을 만족하는 주행이 가능한 뱀 로봇의 하드웨어와 그 주행 방식을 설계하였고, 수치적 방법론을 통해 그 역학적 특성을 분석하였다. 또한 실물을 설계 및 제작하는 것으로, 실제 로봇의 설계에서 발생할 수 있는 문제들의 해결책을 제시하였고, 로봇의 제어를 위한 프로그램의 원형을 제시하는 것으로 설계의 현실성과 유효성을 검증하였다.

본문에서 제시한 구동 방식은 높은 정확도의 위치 정보를 제공할 수 있으며, 이는 뱀 로봇의 위치 추정의 정확도를 대폭 향상할 수 있다. 이러한 특징은 뱀 로봇의 자율 주행을 위한 토대가 될 수 있으며, 자율 주행 기술과의 융합을 통해 재난 현장에서 생존자 자율 탐색 기능 혹은 지형 정보 생성 등의 기술로 발전할 수 있다.

하지만, 본문에서는 로봇의 구동 지형을 평면으로 한정하였으며, 구체적인 위치 추정 알고리즘을 제시하지는 못하였다. 전자는 본 연구에서 뱀 로봇의 장점 중 하나인 환경 적응력을 충분히 고려되지 않았음을 의미하며, 후자는 로봇의 실질적인 활용도를 입증하기에 본문의 연구가 충분치 못하였음을 의미한다. 원격 제어 알고리즘 또한 고려되지 않았다. 추후 연구에서는 3차원 구동을 위한 메커니즘과 위치 추

정을 위한 알고리즘이 연구가 필요하다고 판단된다.

로봇의 하드웨어적 측면에도 여러 문제가 존재한다. 가장 큰 문제는 각속도의 불연속성으로 인해 차체에 불규칙적이고 매우 큰 힘과 돌림힘이 가해진다는 점이다. 이는 액추에이터와 차량의 내구성에 부정적인 영향을 미칠 수 있다. 또한, 차체의 속도가 높아질수록 각 액추에이터에 큰 부담이 가해진다는 문제도 발견되었다. 이는 각 구동점이 이동 경로 지나도록 기하학적 제약조건을 가하여 발생한 문제이며, 후속 연구를 통한 수학적으로 매끄러운 주행 방식의 개발이 필요하다.

후 기

본 연구는 한국기술교육대학교 LINC 사업단의 지원을 받아 수행되었다.

참고문헌

(References)

(1) Ministry of Emergency Management Beijing Normal University National Disaster Reduction Centre of China International Federation of Red Cross and Red Crescent Societies, 2022, “2021 Global Disaster Assessment Report”, UNDRR PreventionWeb, https://www.preventionweb.net/publication/2021-global-disaster-assessment-report, pp. 3~48.

(2) Robin R. Murphy, 2017, "Disaster Robotics", The MIT Press, Massachusetts, pp 1~61.

(3) Xiaolong Yang, Long Zheng, Da Lü, Jinhao Wang and Shukun Wang, Hang Su, Zhixin Wang and Luquan Ren, 2022, “The snake-inspired robots: a review”, *Assembly Automation*, vol 42, No 4, pp 567~583.

(4) Roland Siegwart and Illah R. Nourbakhsh, 2004, "Introduction to Autonomous Mobile Robots", The MIT Press, Massachusetts, pp 181~256.

(5) Makoto Mori, Hiroya Yamada and Shigeo Hirose, 2005, "Design and Development of Active Cord Mechanism "ACM-R3" and its 3-dimensional Locomotion Control", *The Robotics Society of Japan*, Vol 23, No 7, pp 120~131.

(6) Shigeo Hirose and Hiroya Yamada, 2009, "Snake-like robots [Tutorial]", *IEEE Robotics & Automation Magazine*, Vol 16, No 1, pp 88~98.

(7) Shunichi Takaoka, Hiroya Yamada, Shigeo Hirose, 2011, "Snake-like active wheel robot ACM-R4.1 with joint torque sensor and limiter", *2011 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pp 1081~1088.

(8) Bernhard Klaassen and Karl L. Paap, 1999, "GMD-SNAKE2: A Snake-Like Robot Driven by Wheels and a Method for Motion Control", *1999 IEEE International Conference on Robotics & Automation*, pp 3014~3019.

(9)"Guardian® S Remote Visual Inspection & Surveillance Robot", SARCOS, accessed Aug 27, 2023, https://www.sarcos.com/products/guardian-s-overview/.

(10) James C. McKenna, David J. Anhalt, Frederick M. Bronson, H. Ben Brown, Michael Schwerin, Elie Shammas, and Howie Choset, 2008, "Toroidal Skin Drive for Snake Robot Locomotion", *2008 IEEE International Conference on Robotics and Automation,* pp 1150 ~ 1155.

(11) Clive L. Dym, Patrick Little, and Elizabeth J. Orwin, 2014, "Engineering Design: a project based introduction, 4th edition", WILEY, New York, pp 19~27.

(12) Steven C. Chapra, 2008, "Applied Numerical Methods with MATLAB: for Engineers and Scientists", Mc GrawHill, New York, pp 429~458.

부록 A1. 프로젝트 진행 과정

A1.1. 공학 설계 프로세스

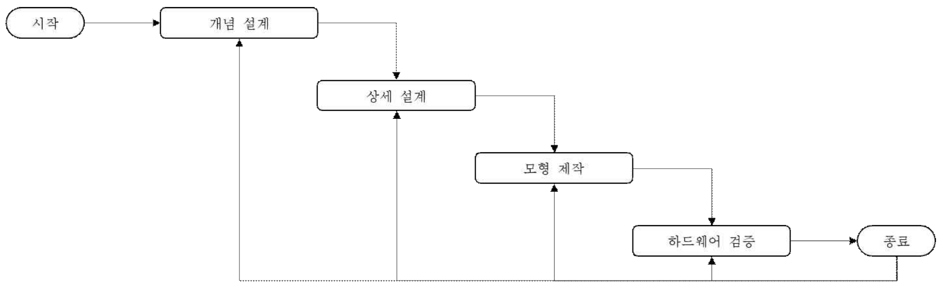


Fig. 27 Engineering process combined with waterfall process.

C. Dym, P. Little 등은 공학설계의 일반적인 절차로서 “문제 정의”, “개념 설계”, “상세 설계”, “설계 의사소통”의 5단계에 걸친 프로세스를 제시한다.(12) 하지만 이는 기업에서의 설계 프로젝트를 위한 프로세스이다. 특히, “개념 설계” 단계에서는 한 번에 다수의 설계안을 수립할 것이 요구되며, “상세 설계” 단계에서는 해당 아이디어들에 대한 일괄적인 설계 및 문제 파악 등의 작업이 이루어진다. 따라서 다수의 인력이 필요하다. 본 설계는 동시에 여러 개의 설계안을 동시에 검증하기에는 인력이 모자라다는 한계가 있었으며, 이에 그림 29와 같이 다소 수정된 형태의 공학 설계 프로세스를 적용하였다.

수정된 설계 프로세스는 폭포수 모형의 특징을 가지며, 본래 프로세스와는 달리 환류 과정이 존재한다. 이 방식을 도입하는 것으로 인해 발생 가능한 문제점의 조기 진단에는 곤란을 겪었지만, 인력이 분산되는 것을 예방할 수 있었다. 파기된 안건에서 발견된 문제들에 대한 시행착오를 통해 지식이 축적되어 그 다음으로 제시된 설계 안건에 반영되는 등, 프로젝트 진행에 대한 긍정적인 효과 또한 확인할 수 있었다.

A1.2. 파기된 설계안

A1.1절에서 기술한 바와 같이, 본 설계에서 활용한 설계 프로세스 도중에는 다수의 설계안이 파기되고 재개발되었다. 이 절에서는 프로젝트 수행 중 개발되었던 각 설계안에 대한 설명과 발견된 문제점 및 파기된 이유 등을 간략히 서술한다.

A1.2.1. Cable-driven articulated single continuous track

가장 처음 제안되었던 설계안으로, 케이블을 이용한 몸통 각도 제어를 특징으로 한다. 이는 내시경 카메라의 각도 제어 원리를 응용한 것으로, 주행 경로와 차체의 위치가 수학적으로 완전하게 동일하도록 설계하였다. 그림 30은 이 로봇의 동작 방식을 나타낸 것이다.

해당 모델은 무한궤도의 각 마디와 케이블을 고정하는 방식으로 자세를 제어한다. 때문에 케이블에는 높은 장력이 요구되며, 케이블 고정 장치 또한 매우 튼튼해야 한다. 더불어, 케이블 고정 장치가 충분히 정교해야만 정확한 자세 제어가 가능하다.

로봇의 가장 근본적인 문제점은 하드웨어 설계 과정에서 드러났다. 케이블 고정 장치를 충분히 작게 만드는 것이 매우 어려웠기 때문이다. 첫 번째 이유는 물리적 취약성이다. 케이블의 장력을 버티기 위해 필요한 잠금 장치의 내구도를 충분히 고려하지 못한 상태로 메커니즘을 설계하였다. 두 번째 이유는 제작의 어려움이다. 로봇의 용도를 고려했을 때 가능한 잠금장치의 크기를 만족하기 위해서는 속이 텅 빈 형태의 슬롯이 필요한데, 이를 제작하기에 적절한 수단이 없었다.

이상의 조건들을 고려했을 때, 구현 가능성이 전무하다고 판단하여 파기를 결정하였다. 메커니즘의

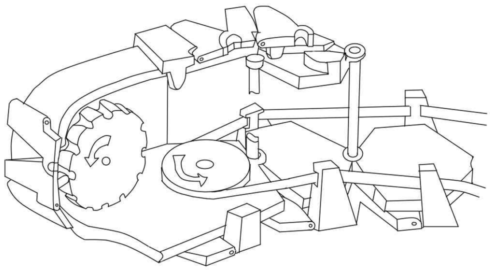


Fig. 28 Sketch of cable-driven articulated single continuous track

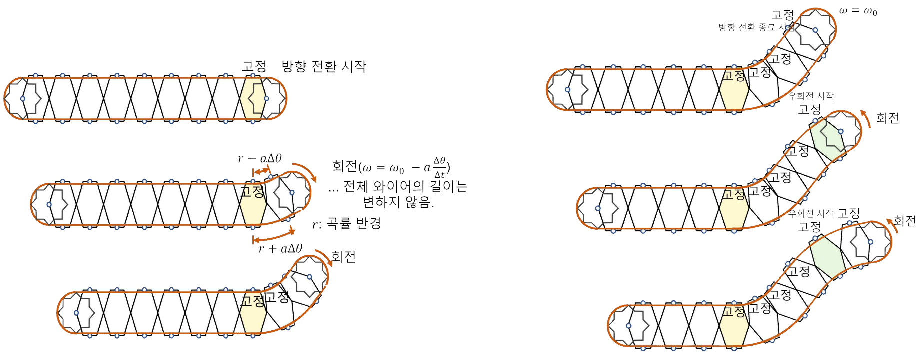
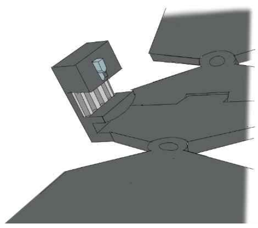
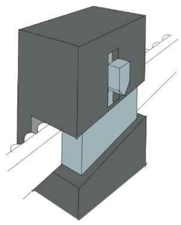


Fig. 29 Control method of cable-driven articulated single continuous track



(a) A sketch of cable anchor installed on a caterpillar.



(b) A sketch of cable anchor locking timing belt.

Fig. 30 Cable anchor designed for timing belt.

실현 가능성에 대한 판단이 적절치 못했다는 점을 감안하여, 다음 설계안에는 더 간단하고 확실한 구동 방법을 우선적으로 고려하였다.

A1.2.2. Servo-driven articulated single continuous track.

이전 구동 방식에서의 문제점에 착안하여, 몸체의 각도를 서보 모터로 제어하는 새로운 모델을 구상하였다. 또한 이산 무한 궤도를 도입한 모델로, 유니버설 체인으로 이뤄진 무한 궤도를 사용한다. 본문에서의 설계와 매우 유사한 구조를 가지고 있는 모델이다. 본문의 설계와 마찬가지로 접지 패드를 사용하여 접지 조건을 만족하는 주행 방식을 시도한 모델이었으나, 주행 방식의 문제로 실패하였다.

본 모델의 문제는 구동각의 불연속성이었다. 로봇의 모든 마디가 경유점을 지나도록 구속 조건을 부여하였으나, 예상과는 달리 본문의 2.3.2절에서 언급한 바와 같은 불연속성이 발견되었다. 해당 모델로는 불연속성을 개선한 새로운 주행 방식을 만족하며 주행할 수 없다고 판단하여 파기를 결정하였다. 본문의 모델 ADCR은 본 모델에서 발견된 구동각의 불연속성을 해소한 모델이라고 할 수 있다.

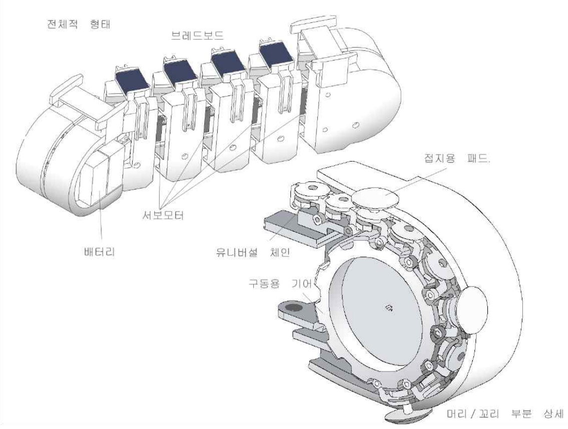


Fig. 31 3D model of Servo-driven articulated single continuous track. robot.

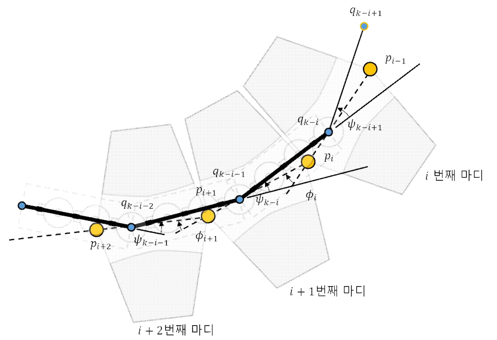


Fig. 32 Displacement constraint imposed on control nodes. Note that body segments pass' through stopovers.

부록 2. 국소적 변위, 속도, 가속도 조건에 대한 수치 미분 방법

N개의 입자로 구성된 물리학적 계 A를 고려한다. A의 각 입자의 위치 정보를 벡터 $X_i = [x_1^i, x_2^i, \cdots, x_N^i]^t$와 같이 표현하자. 이때 i에 의하여 모든 $x_j^i (j=1,2,\cdots,N)$의 값이 결정된다고 한다. 한편, X_i의 원소 중 하나의 증가율이 i에 비례하는 값을 갖는다고 가정한다. 편의를 위하여 $x_1^i = ki + x_1^0$와 같다고 가정하자.

시간을 나타내는 변수 t에 대하여 $\frac{dx_1^i}{dt}$와 $\frac{d^2 x_1^i}{dt^2}$ 의 값이 각각 v, a로 주어졌을 때, 위치 정보의 점열 $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$를 활용하여 $\frac{dX_i}{dt}, \frac{d^2 X_i}{dt^2}$의 값을 수치적으로 계산하는 문제를 고려한다.

먼저 $a=0$인 경우에 한하여 $\frac{dX_i}{dt}$의 계산을 고려한다. X_i를 측정한 시간을 t_i와 같이 표현하면 중심 차분 근사식(11)에 근거하여 다음의 근사를 고려할 수 있다.

$$v = \frac{\Delta x_1^i}{\Delta t} = \frac{x_1^{i+1} - x_1^{i-1}}{t_{i+1} - t_{i-1}}$$

$t_i = 0$ 및 등속 운동을 가정하는 것으로 다음을 구할 수 있다.

$$\Delta t = \frac{x_1^{i+1} - x_1^{i-1}}{v}, \; t_{i-1} = -\frac{1}{2}\Delta t, \; t_{i+1} = \frac{1}{2}\Delta t$$

따라서 X_{i+1}을 측정한 시간과 X_{i-1}을 측정한 시간의 간격을 확인할 수 있으므로, $\frac{dX_i}{dt}$는 다음과 같이 근사할 수 있다:

$$\frac{dX_i}{dt} \approx \frac{X_{i+1} - X_{i-1}}{\Delta t} = \frac{X_{i+1} - X_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} v = \frac{X_{i+1} - X_{i-1}}{2k} v \;\; (\because x_1^i = ki + x_1^0) \qquad \text{(A-1)}$$

다음으로는 $a>0$인 경우 $\frac{dX_i}{dt}, \frac{d^2 X_i}{dt^2}$의 계산을 고려한다. 국소적인 등가속도 운동을 고려하여 x_1에 대하여 다음의 수식을 가정한다:

$$x_1(t) = \frac{1}{2}a(t - t_i)^2 + v(t - t_i) + x_1^i$$

이때 x_1^{i-2}, x_1^{i-1}, x_1^{i+1}, x_1^{i+2}에 대해서 각각 다음이 성립한다:

$$x_1^{i-2} - x_1^i = \frac{1}{2}a(t_{i-2} - t_i)^2 + v(t_{i-2} - t_i) = -2k$$

$$x_1^{i-1} - x_1^i = \frac{1}{2}a(t_{i-1} - t_i)^2 + v(t_{i-1} - t_i) = -k$$

$$x_1^{i+1} - x_1^i = \frac{1}{2}a(t_{i+1} - t_i)^2 + v(t_{i+1} - t_i) = k$$

$$x_1^{i+2} - x_1^i = \frac{1}{2}a(t_{i+2} - t_i)^2 + v(t_{i+2} - t_i) = 2k$$

편의상 $t_i = 0$을 가정하여 위의 방정식을 풀어내면 다음을 얻을 수 있다:

$$t_{i-2} = \frac{1}{a}\left[\sqrt{v^2 - 4ak} - v\right]$$

$$t_{i-1} = \frac{1}{a}\left[\sqrt{v^2 - 2ak} - v\right]$$

$$t_{i+1} = \frac{1}{a}\left[\sqrt{v^2 + 2ak} - v\right]$$

$$t_{i+2} = \frac{1}{a}\left[\sqrt{v^2 + 4ak} - v\right]$$

따라서 $\frac{dX_{i-1}}{dt} \approx \frac{X^i - X_{i-2}}{t_i - t_{i-2}}$와 같이 계산되며, $\frac{dX_{i+1}}{dt} \approx \frac{X_{i+2} - X_i}{t_{i+2} - t_i}$와 같이 계산할 수 있다. 결과적으로 가속도

는 다음과 같이 계산된다:

$$\frac{d^2X_i}{dt^2}=\frac{1}{\Delta t}\left[\frac{dX_{i+1}}{dt}-\frac{dX_{i-1}}{dt}\right]\approx\frac{1}{t_{i+1}-t_{i-1}}\left[\frac{x_{i+2}-x_i}{t_{i+2}-t_i}-\frac{x_i-x_{i-2}}{t_i-t_{i-2}}\right]$$

$$=\left(\frac{1}{t_{i+1}-t_{i-1}}\cdot\frac{1}{t_{i+2}-t_i}\right)x_{i+2}-\frac{1}{t_{i+1}-t_{i-1}}\left(\frac{1}{t_{i+2}-t_i}+\frac{1}{t_i-t_{i-2}}\right)x_i+\left(\frac{1}{t_{i+1}-t_{i-1}}\cdot\frac{1}{t_i-t_{i-2}}\right)x_{i-2} \qquad \text{(A-2)}$$

이상의 방법을 적용하는 것으로 임의의 i와 x_1^i속도 v, 가속도 a에 따른 전체 계의 변화 $\frac{dX_i}{dt},\frac{d^2X_i}{dt^2}$를 계산할 수 있다.